OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
– ETAPA LOCALĂ -
08.02.2025
CLASA a IX - a

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte.
Pe foaia de concurs se trec rezolvările complete.
Timp de lucru: 3 ore

1. Să se calculeze suma $S = x + 2x^2 + 3x^3 + \ldots + nx^n, x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}^*$.

2. Punctele distincte A, B, C, D sunt situate, în această ordine, pe dreapta d astfel încât AB=2BC=3CD.

Dacă O este un punct arbitrar din plan și $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = m\overrightarrow{OA} + n\overrightarrow{OD}$, unde m, $n \in \mathbb{R}$, determinați valoarea numărului $m + n$.

3. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $\left[\frac{x^3 - 3x^2 + 2x - 1}{6}\right] = x - 2$, unde [x] reprezintă partea întreagă a numărului x.

4. Fie ABCD un patrulater convex, $\{O\} = AC \cap BD$.

a) Să se arate că centrele de greutate ale triunghiurilor AOB, BOC, COD și DOA, notate cu G_1, G_2, G_3, respectiv G_4, determină un paralelogram.

b) Să se demonstreze că punctul O este centrul paralelogramului $G_1G_2G_3G_4$ dacă și numai dacă are loc relația $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$.

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
– ETAPA LOCALĂ -
08.02.2025
CLASA a X - a

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte.
Pe foaia de concurs se trec rezolvările complete.
Timp de lucru: 3 ore

1. Se consideră numărul complex z, cu proprietatea că $|z| < \frac{1}{2}$. Demonstrați că $\left|(1+i)\cdot z^3 + i\cdot z\right| < \frac{3}{4}$.

2. Se consideră M_0, M_1, M_2 imaginile în planul complex ale rădăcinilor ecuației $z^3 = 1$. Dacă $M(\cos t + i\sin t)$, $t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, să se demonstreze că $MM_2 = MM_0 + MM_1$.

3. a) Se consideră $(a_n)_{n\geq 1}$ o progresie aritmetică cu termeni pozitivi. Demonstrați că $\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt{a_1 \cdot a_n}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

b) Se consideră $(b_n)_{n\geq 1}$ o progresie geometrică cu termeni mai mari ca 1. Demonstrați că $\lg\left(\frac{b_1 + b_2 + \dots + b_n}{n}\right) \geq \sqrt{\lg b_1 \cdot \lg b_n}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

4. Să se verifice dacă există funcții injective $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, cu proprietatea că

$$f(2023^x) + f(2025^x) = 2024, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
– ETAPA LOCALĂ -
08.02.2025
CLASA a XI - a

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte.
Pe foaia de concurs se trec rezolvările complete.
Timp de lucru: 3 ore

1. Fie $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ o matrice cu $\mathrm{Tr}(A) = 2$ și $\det(A) = 3$. Demonstrați că

$$2\det(A^2 + I_2) - \det(A^2 + 3I_2) = 4.$$

2. Fie matricele $A,\ B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Să se arate că:

a) dacă matricea $I_n + AB$ este inversabilă, atunci matricea $I_n + BA$ este inversabilă.

b) dacă matricea $I_n + (AB)^p$ este inversabilă, atunci matricea $I_n + (BA)^p$ este inversabilă, pentru orice $p \in \mathbb{N},\ \ p \geq 2$.

3. a) Fie $a \in \mathbb{N}^*$. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\left\{\sqrt{a^2n^2 + (2a-1)n + 1}\right\}$, unde $\{x\}$ reprezintă partea fracționară a lui x.

b) Calculați $\lim\limits_{n\to\infty}\sin^2\left(\pi\sqrt{n^2+2n+2}\right)$.

4. Fie șirul $(x_n)_{n\geq 0}$ cu $x_0 = 0$ și $x_{n+1} = x_n + a + \sqrt{b^2 + 4ax_n}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, unde $a, b > 0$. Determinați $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{n^2}$.

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
– ETAPA LOCALĂ -
08.02.2025
CLASA a XII - a

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte.
Pe foaia de concurs se trec rezolvările complete.
Timp de lucru: 3 ore

1. Fie $(G,\cdot)$ un grup cu elementul neutru e și $x, y \in G \setminus \{e\}$ astfel încât $\text{ord}(x) = 2,\ y^6 = e$ și $xy = y^4x$. Să se arate că $\text{ord}(y) = 3$ și $xy = yx$.

2. Fie $k \in (1, +\infty)$ şi $G = \left(-\infty, \frac{k^2-1}{k}\right] \cup \left[\frac{k^2+1}{k}, +\infty\right)$.

Se consideră operaţia $x * y = kxy - k^2(x+y) + k^3 + k, \forall\, x, y \in G.$

a) Să se demonstreze că $t \in G$ dacă şi numai dacă $|t-k| \geq \frac{1}{k}$, $\forall\, k \in (1, +\infty)$.

b) Arătaţi că „ $*$ ” este lege de compoziţie pe G.

c) Studiaţi existenţa elementului neutru şi a elementelor simetrizabile.

3. Determinați funcția $f:(0,\infty) \to \mathbb{R}$, știind că admite o primitivă F astfel încât $xf(x) + F(x) = \frac{x+1}{x(1+xe^x)}, \forall x \in (0,\infty)$ și $F(1) = 1 - \ln(1+e)$.

4. Calculați $\int \frac{x^2+3x+3}{(x+2)^3} e^x sinx\, dx$, $x > -2$.