OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
– ETAPA LOCALĂ –
08.02.2025
CLASA a V-a

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte.
Pe foaia de concurs se trec rezolvările complete.
Timp de lucru: 3 ore

1. Fie numerele: $a = 2024 + 2 \cdot (1 + 2 + 3 + \cdots + 2023)$ și $b = 1 + 3 + 5 + \cdots + 2023$. Arătați că: $a = 4 \cdot b$.

2. Determinați numerele naturale de forma $\overline{ab}$ pentru care are loc egalitatea:

$$\overline{17ab} + \overline{ab57} = 5191.$$

3. Știind că $2^{12n+18} + 4^{6n+9} + 8^{4n+6} + 64^{2n+3} = 2^{9(n+10)+6002}$

a) Aflați n număr natural.

b) Pentru n găsit anterior, arătați că $S = 2022^n + 2023^n + 2024^n + 2025^n$ nu este pătrat perfect.

4. Într-o cutie sunt 28 de bile roșii, galbene și verzi, astfel încât oricum am lua 21 de bile, vom găsi printre ele bile de toate culorile. Știind că numărul bilelor roșii este impar și este egal cu numărul bilelor galbene, aflați câte bile sunt din fiecare culoare.

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
– ETAPA LOCALĂ -
08.02.2025
CLASA a VI - a

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte.
Pe foaia de concurs se trec rezolvările complete.
Timp de lucru: 3 ore

1. Se consideră mulțimile A şi B. Aflați cardinalul mulțimii A, știind că sunt îndeplinite simultan condițiile:

1) $card(A-B)=5$;

2) $card(B)=20$;

3) $card(A\cup B)-card(A)=9$.

2. În portul Constanța de la Marea Neagră erau ancorate patru șalupe, care făceau curse regulate către diferite destinații. În data de 15 iulie 2024, la amiază, toate patru au părăsit în același timp portul. Se știe că prima șalupă revine în portul Constanța din 4 în 4 săptămâni, a doua din 8 în 8 săptămâni, a treia la fiecare 12 săptămâni, iar a patra la fiecare 16 săptămâni. În ce dată se vor întâlni din nou, în portul Constanța, toate cele patru șalupe?

3. În jurul punctului O se consideră unghiurile $\sphericalangle AOB$, $\sphericalangle BOC$, $\sphericalangle COD$, $\sphericalangle DOA$ cu $m(\sphericalangle AOB) = 138^\circ$ și $m(\sphericalangle COD) = 122^\circ$. Știind că $[OE$ este bisectoarea unghiului $\sphericalangle AOD$, iar $[OF$ este bisectoarea unghiului $\sphericalangle BOC$, aflați:

a) măsura unghiului $\sphericalangle EOF$;

b) măsurile unghiurilor $\sphericalangle AOD$ și $\sphericalangle BOC$ dacă semidreapta opusă semidreptei $[OE$ este bisectoarea unghiului $\sphericalangle BOF$.

4. Aflați numerele $\overline{ab}$ știind că $\dfrac{\overline{ab}+4b}{a+2b}\in\mathbb{N}$ și $\dfrac{\overline{ba}+4a}{2a+b}\in\mathbb{N}$.

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
– ETAPA LOCALĂ -
08.02.2025
CLASA a VII - a

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte.
Pe foaia de concurs se trec rezolvările complete.
Timp de lucru: 3 ore

1. a) Se consideră numerele

$$a=\left(\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{2}{\sqrt{12}}+\frac{3}{\sqrt{27}}+\frac{4}{\sqrt{48}}\right):\frac{2}{3} \text{ și } b=\frac{\sqrt{26^2-10^2}}{\sqrt{20^2-16^2}}\cdot\frac{3\sqrt{2}}{2}+\left|2\sqrt{5}-5\right|-\left(5-2\sqrt{5}\right).$$

Calculați $(a+b)\cdot|a-b|$.

b) Calculați pătratul numărului $c,$ unde

$$c=\frac{1}{1+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}}+...+\frac{1}{\sqrt{119}+\sqrt{121}}.$$

2. Determinați numerele raționale m și n pentru care are loc egalitatea

$$\frac{m}{\sqrt{5}}\cdot\sqrt{45-10\sqrt{14}}+n\sqrt{9+2\sqrt{14}}=\sqrt{2}+9\sqrt{7}.$$

3. În triunghiul ABC, $\sphericalangle B=90^0$, bisectoarea unghiului A intersectează latura BC în D și perpendiculara în C, pe AC, în E. Fie $EF \parallel BC$, $F\in AB$.

a) Arătați că ΔCDE este isoscel.

b) Demonstrați că $CDFE$ este romb.

4. Fie $ABCD$ pătrat și punctul E aparține segmentului DC. Fie $F\in BC$ astfel încât B să fie între F și C, iar $DE=BF$. Fie G aparține segmentului BC astfel încât $AE=FG$. Notăm M mijlocul segmentului AG și $AE\cap FM=\{N\}$.

a) Arătați că $GQ\perp AF$, unde $FM\cap AB=\{Q\}$;

b) Arătați că $ABGN$ este trapez dreptunghic.

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
– ETAPA LOCALĂ -
08.02.2025
CLASA a VIII - a

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte.
Pe foaia de concurs se trec rezolvările complete.
Timp de lucru: 3 ore

1. Se consideră un număr natural n și definim mulțimea $A_n = \{x \in \mathbb{R} \mid |x+n-6| \leq 3n+4\}$.

a) Scrieți mulțimea A_1 sub formă de interval.

b) Aflați numărul natural n pentru care A_n conține exact 609 numere întregi.

2. Fie $a = \sqrt{\frac{2025+x}{2025-x}} + \sqrt{\frac{2025-x}{2025+x}}$ și $b = \sqrt{\frac{2025+x}{2025-x}} - \sqrt{\frac{2025-x}{2025+x}}$, unde $x < 2025$ este un număr natural prim. Determinați x pentru care numărul $\frac{a}{b}$ este întreg.

3. Fie triunghiul echilateral ABC cu AB=15$\sqrt{2}$ cm și $D \notin (ABC)$, astfel încât AD=BD=CD=15 cm. În triunghiul ABD, semidreapta AP este bisectoarea $\sphericalangle DAB$, $P \in BD$, iar în triunghiul ADC, semidreapta AQ este bisectoarea $\sphericalangle DAC$, $Q \in CD$. Se consideră $T \in AD$, astfel încât $\frac{TD}{TA} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Să se arate că:

a) $(PTQ) \parallel (ABC)$

b) $AD \perp PQ$

4. Se consideră tetraedrul ABCD, înălțimile din *A* și *C* ale fețelor *ABD* și *CBD* sunt concurente în *E*, $E \in BD$.

a) Arătați că înălțimile din *A* și *C* ale tetraedrului sunt concurente.

b) Arătați că înălțimile din *B* și *D* ale fețelor *BAC* și *DAC* sunt concurente într-un punct pe dreapta *AC*.