OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
– ETAPA LOCALĂ –
08.02.2025

CLASA a IX -a

SOLUȚII ŞI BAREME ORIENTATIVE

Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte.
Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.

1. Să se calculeze suma: $S = x + 2x^2 + 3x^3 + \ldots + nx^n, x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}^*$

Soluție:

$$S = (x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n) + (x^2 + x^3 + \ldots + x^n) + (x^3 + \ldots + x^n) + \ldots + x^n$$

$$= x \cdot \frac{x^n - 1}{x - 1} + x^2 \cdot \frac{x^{n-1} - 1}{x - 1} + x^3 \cdot \frac{x^{n-2} - 1}{x - 1} + \ldots + x^n \cdot \frac{x - 1}{x - 1}, x \neq 1$$

$$= \frac{1}{x - 1}(x^{n+1} - x + x^{n+1} - x^2 + x^{n+1} - x^3 + \ldots + x^{n+1} - x^n)$$

$$= \frac{1}{x - 1}[nx^{n+1} - (x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n)]$$

$$= \frac{1}{x - 1}\left(nx^{n+1} - x \cdot \frac{x^n - 1}{x - 1}\right) = \frac{1}{(x - 1)^2}(nx^{n+2} - nx^{n+1} - x^{n+1} + x)$$

$$= \frac{x}{(x - 1)^2}[nx^{n+1} - (n + 1)x^n + 1], x \neq 1$$

Dacă $x = 1$, atunci $S = 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \dfrac{n(n + 1)}{2}$

Detalii de rezolvare	**Barem asociat**
$S=(x+x^2+x^3+\ldots+x^n)+(x^2+x^3+\ldots+x^n)+(x^3+\ldots+x^n)+\ldots+x^n$	1p
$S=x\cdot\frac{x^n-1}{x-1}+x^2\cdot\frac{x^{n-1}-1}{x-1}+x^3\cdot\frac{x^{n-2}-1}{x-1}+\ldots+x^n\cdot\frac{x-1}{x-1}, x\neq 1$	2p
$S=\frac{1}{x-1}[nx^{n+1}-(x+x^2+x^3+\ldots+x^n)]$	2p
$S=\frac{x}{(x-1)^2}[nx^{n+1}-(n+1)x^n+1], x\neq 1$	1p
$S=1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$, dacă $x=1$	1p

2. Punctele distincte A,B,C,D sunt situate, în această ordine, pe dreapta d astfel încât AB=2BC=3CD.
Dacă O este un punct arbitrar din plan și $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=m\overrightarrow{OA}+n\overrightarrow{OD}$, unde $m, n \in \mathbb{R}$, determinați valoarea numărului $m + n$.

Soluție:

$$\frac{AB}{6}=\frac{BC}{3}=\frac{CD}{2}=K \Rightarrow AB=6k, BC=3k, CD=2k \Rightarrow AD=11k$$

$$\frac{AB}{BD}=\frac{6}{5} \Rightarrow \overrightarrow{OB}=\frac{5}{11}\overrightarrow{OA}+\frac{6}{11}\overrightarrow{OD} \text{ și } \frac{AC}{CD}=\frac{9}{2} \Rightarrow \overrightarrow{OC}=\frac{2}{11}\overrightarrow{OA}+\frac{9}{11}\overrightarrow{OD}$$

Deci, $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\frac{18}{11}\overrightarrow{OA}+\frac{26}{11}\overrightarrow{OD} \Rightarrow m+n=\frac{44}{11}=4.$

Pentru cazul particular în care punctul O$\in \{A,B,C,D\}$ se calculează m + n.

Detalii de rezolvare	**Barem asociat**
$\frac{AB}{6}=\frac{BC}{3}=\frac{CD}{2}=K \Rightarrow AB=6k, BC=3k, CD=2k \Rightarrow AD=11k$	2p
$\frac{AB}{BD}=\frac{6}{5} \Rightarrow \overrightarrow{OB}=\frac{5}{11}\overrightarrow{OA}+\frac{6}{11}\overrightarrow{OD}$	1p
$\frac{AC}{CD}=\frac{9}{2} \Rightarrow \overrightarrow{OC}=\frac{2}{11}\overrightarrow{OA}+\frac{9}{11}\overrightarrow{OD}$	1p
$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\frac{18}{11}\overrightarrow{OA}+\frac{26}{11}\overrightarrow{OD} \Rightarrow m+n=\frac{44}{11}=4.$	2p
O$\in \{A,B,C,D\}$	1p

3. Rezolvați în $\mathbb{R}$ ecuația $\left[\frac{x^3-3x^2+2x-1}{6}\right]=x-2$, unde [x] reprezintă partea întreagă a numărului x.

Soluția I:

$$\left[\frac{x^3-3x^2+2x-1}{6}\right]=x-2 \Rightarrow x\in\mathbb{Z} \Rightarrow x-2\le\frac{x^3-3x^2+2x-1}{6}<x-1$$

$$\Rightarrow 6x-12\le x^3-3x^2+2x-1<6x-6 \Leftrightarrow -11\le x^3-3x^2-4x<-5$$

$$\Rightarrow x^3-3x^2-4x\in -11;-5)\cap\mathbb{Z} \Leftrightarrow x(x+1)(x-4)\in\{-11;-10;-9;-8;-7;-6\}$$

dar $x(x+1)\ \vdots\ 2, \forall x\in\mathbb{Z} \Rightarrow x(x+1)(x-4)\in\{-10;-8;-6\}$

dacă $x\ge 4 \Rightarrow x(x+1)(x-4)\ge 0$

dacă $x\le -2 \Rightarrow x(x+1)(x-4)\le -12$

prin calcul se determină $x=1$ soluție

Soluția a II-a:

$$\left[\frac{x^3-3x^2+2x-1}{6}\right]=x-2 \Rightarrow x\in\mathbb{Z}$$

$$\left[\frac{x^3-3x^2+2x-1}{6}\right]=\left[\frac{x(x-1)(x-2)}{6}-\frac{1}{6}\right]=\frac{x(x-1)(x-2)}{6}+\left[-\frac{1}{6}\right]$$

pentru că $x(x-1)(x-2)\ \vdots\ 6, deci\ \frac{x(x-1)(x-2)}{6}\in\mathbb{Z}$

Ecuația devine $\frac{x(x-1)(x-2)}{6}-1=x-2 \Leftrightarrow x(x-1)(x-2)-6=6(x-2)$

adică $(x+2)(x-2)(x-3)=6 \Rightarrow (x+2),(x-2),(x-3)\in D_6 \Rightarrow x=1$ soluție

Detalii de rezolvare		**Barem asociat**
Soluția I:	***Soluția a II-a:***	
Deduce $x \in \mathbb{Z}$	Deduce $x \in \mathbb{Z}$	1p
Deduce că $x-2 \leq \frac{x^3-3x^2+2x-1}{6} < x-1$	$\left[\frac{x(x-1)(x-2)}{6}-\frac{1}{6}\right]=\frac{x(x-1)(x-2)}{6}+\left[-\frac{1}{6}\right]$	1p
Arată că $x^3-3x^2-4x \in$ $-11;-5) \cap \mathbb{Z}$	Deduce că $\frac{x(x-1)(x-2)}{6}-1=x-2$	2p
Arată că $x(x+1)(x-4) \in \{-10;-8;-6\}$	Arată că $(x+2)(x-2)(x-3)=6$	1p
Determină x = 1 soluție	Determină x = 1 soluție	2p

4. Fie ABCD un patrulater convex, $\{O\} = AC \cap BD$.

a) Să se arate că centrele de greutate ale triunghiurilor AOB, BOC, COD și DOA, notate cu G_1, G_2, G_3, respectiv G_4, determină un paralelogram.

b) Să se demonstreze că punctul O este centrul paralelogramului $G_1G_2G_3G_4$ dacă și numai dacă are loc relația $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$.

Soluție:

a) $\overrightarrow{OG_1} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}), \overrightarrow{OG_2} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}), \overrightarrow{OG_3} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}), \overrightarrow{OG_4} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OA})$

$$\overrightarrow{OG_1} + \overrightarrow{OG_3} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}) = \overrightarrow{OG_2} + \overrightarrow{OG_4} \Leftrightarrow \overrightarrow{OG_2} - \overrightarrow{OG_1} = \overrightarrow{OG_3} - \overrightarrow{OG_4}$$

Deoarece $\begin{cases} \overrightarrow{OG_2} - \overrightarrow{OG_1} = \overrightarrow{G_1G_2} \\ \overrightarrow{OG_3} - \overrightarrow{OG_4} = \overrightarrow{G_4G_3} \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{G_1G_2} = \overrightarrow{G_4G_3} \Leftrightarrow G_1G_2G_3G_4$ este paralelogram.

b)<u>*Direct:*</u> În paralelogramul $G_1G_2G_3G_4$ presupunem că $\{O\} = G_1G_3 \cap G_2G_4 \Leftrightarrow \overrightarrow{OG_1} + \overrightarrow{OG_3} = \vec{0}$.

Dar $\overrightarrow{OG_1} + \overrightarrow{OG_3} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})$, de unde rezultă că $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$.

<u>*Reciproc:*</u> $Fie\ \{O\} = AC \cap BD$ care verifică relația $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$.

Deoarece $\overrightarrow{OG_1} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}), \overrightarrow{OG_3} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})$ rezultă că $3\overrightarrow{OG_1} = -3\overrightarrow{OG_3}$, deci $\overrightarrow{OG_1} = -\overrightarrow{OG_3}$

$\Leftrightarrow$ O este centrul paralelogramului $G_1G_2G_3G_4$

Detalii de rezolvare	**Barem asociat**
$a)\overrightarrow{OG_1}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}),\overrightarrow{OG_2}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}),\overrightarrow{OG_3}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}),\overrightarrow{OG_4}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OA})$	2p
$\overrightarrow{OG_1}+\overrightarrow{OG_3}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD})=\overrightarrow{OG_2}+\overrightarrow{OG_4}\Leftrightarrow\overrightarrow{OG_2}-\overrightarrow{OG_1}=\overrightarrow{OG_3}-\overrightarrow{OG_4}$	2p
Deoarece $\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{OG_2}-\overrightarrow{OG_1}=\overrightarrow{G_1G_2}\\\overrightarrow{OG_3}-\overrightarrow{OG_4}=\overrightarrow{G_4G_3}\end{array}\right\|\Rightarrow\overrightarrow{G_1G_2}=\overrightarrow{G_4G_3}\Leftrightarrow$ $G_1G_2G_3G_4$ este paralelogram	1p
b) Direct: În paralelogramul $G_1G_2G_3G_4$ presupunem că $\{O\}=G_1G_3\cap G_2G_4\Leftrightarrow\overrightarrow{OG_1}+\overrightarrow{OG_3}=\vec{0}$ Dar $\overrightarrow{OG_1}+\overrightarrow{OG_3}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD})$, de unde rezultă că $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$	1p
Reciproc: $Fie\ \{O\}=AC\cap BD$ care verifică relația $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$. Deoarece $\overrightarrow{OG_1}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}),\overrightarrow{OG_3}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD})$ rezultă că $3\overrightarrow{OG_1}$=-$3\overrightarrow{OG_3}$, deci $\overrightarrow{OG_1}$=-$\overrightarrow{OG_3}\Leftrightarrow$ O este centrul paralelogramului $G_1G_2G_3G_4$	1p

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN ARAD
Strada Corneliu Coposu nr.26, Telefon: 0257 / 28 00 08, Fax 0257 / 21 47 46,
web : www.isjarad.ro e-mail: inf_arad@isjarad.ro
MINISTERUL EDUCAŢIEI ŞI CERCETĂRII

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
– ETAPA LOCALĂ –
08.02.2025

CLASA a X -a

SOLUȚII ŞI BAREME ORIENTATIVE

Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte.
Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.

1. Se consideră numărul complex z, cu proprietatea că $|z| < \frac{1}{2}$. Demonstrați că $|(1+i) \cdot z^3 + i \cdot z| < \frac{3}{4}$.

Soluție:

Din proprietatea referitoare la modulul produsului și din ipoteză rezultă că: $|(1+i) \cdot z^3 + i \cdot z| = |z| \cdot |(1+i) \cdot z^2 + i| < \frac{1}{2} \cdot |(1+i) \cdot z^2 + i|$

Folosind inegalitatea între modulul sumei și suma modulelor se obține: $|(1+i) \cdot z^3 + i \cdot z| < \frac{1}{2} \cdot [|(1+i) \cdot z^2| + |i|] = \frac{1}{2} \cdot [|1+i| \cdot |z|^2 + 1] = \frac{1}{2} \cdot \left(\sqrt{2} \cdot \frac{1}{4} + 1\right) < \frac{1}{2} \cdot \left(2 \cdot \frac{1}{4} + 1\right) = \frac{3}{4}$

Detalii de rezolvare	Barem asociat
Deduce $|(1+i) \cdot z^3 + i \cdot z| = |z| \cdot |(1+i) \cdot z^2 + i| < \frac{1}{2} \cdot |(1+i) \cdot z^2 + i|$	2p
Deduce $|(1+i) \cdot z^3 + i \cdot z| < \frac{1}{2} \cdot [|1+i| \cdot |z|^2 + 1]$	2p
Arată că $|(1+i) \cdot z^3 + i \cdot z| < \frac{1}{2} \cdot \left(\sqrt{2} \cdot \frac{1}{4} + 1\right)$	2p
Finalizare: $|(1+i) \cdot z^3 + i \cdot z| < \frac{3}{4}$	1p

2. Se consideră M_0, M_1, M_2 imaginile în planul complex ale rădăcinilor ecuației $z^3 = 1$. Dacă $M(\cos t + i \sin t)$, $t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, să se demonstreze că $MM_2 = MM_0 + MM_1$.

Soluție:

Dacă z_0, z_1, z_2 sunt rădăcinile ecuației $z^3 = 1$, atunci $M_0(1)$, $M_1\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$, $M_2\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$

$$MM_2 = \left|\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} - \cos t - i\sin t\right| = \left|\left(-\frac{1}{2} - \cos t\right) + i\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \sin t\right)\right|$$

$$= \sqrt{2 + \cos t + \sqrt{3}\sin t} =$$

$$\sqrt{2 + 2\left(\cos\frac{\pi}{3}\cos t + \sin\frac{\pi}{3}\sin t\right)} = \sqrt{2 + 2\cos\left(\frac{\pi}{3} - t\right)} = \sqrt{4\cos^2\left(\frac{\pi}{6} - \frac{t}{2}\right)}$$

$$= 2\cos\left(\frac{\pi}{6} - \frac{t}{2}\right)$$

deoarece dacă $t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, atunci $\frac{\pi}{6} - \frac{t}{2} \in \left(-\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{6}\right) \subset \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ și prin urmare $\cos\left(\frac{\pi}{6} - \frac{t}{2}\right) > 0$.

$$MM_1 = \left|\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} - \cos t - i\sin t\right| = \left|\left(-\frac{1}{2} - \cos t\right) + i\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \sin t\right)\right|$$

$$= \sqrt{2 + \cos t - \sqrt{3}\sin t} =$$

$$\sqrt{2 + 2\left(\cos\frac{\pi}{3}\cos t - \sin\frac{\pi}{3}\sin t\right)} = \sqrt{2 + 2\cos\left(\frac{\pi}{3} + t\right)} = \sqrt{4\cos^2\left(\frac{\pi}{6} + \frac{t}{2}\right)}$$

$$= 2\cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{t}{2}\right)$$

deoarece dacă $t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, atunci $\frac{\pi}{6} + \frac{t}{2} \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{12}\right) \subset \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ și prin urmare $\cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{t}{2}\right) > 0$.

$MM_0 = |\cos t + i\sin t - 1| = \sqrt{(\cos t - 1)^2 + \sin^2 t} = \sqrt{2 - 2\cos t} = \sqrt{4\sin^2\frac{t}{2}} =$
$2\sin\frac{t}{2}$, deoarece dacă $t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, atunci $\frac{t}{2} \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right) \subset \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ și prin urmare $\sin\frac{t}{2} > 0$.

$$MM_2 = MM_0 + MM_1 \Leftrightarrow 2\cos\left(\frac{\pi}{6} - \frac{t}{2}\right) = 2\sin\frac{t}{2} + 2\cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{t}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{6} - \frac{t}{2}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{t}{2}\right) = \sin\frac{t}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2\sin\frac{\pi}{6}\sin\frac{t}{2} = \sin\frac{t}{2}$$

Obținem $2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sin\frac{t}{2} = \sin\frac{t}{2}$, care este adevărată.

Detalii de rezolvare	**Barem asociat**
Determinarea afixelor punctelor M_0, M_1, M_2	1p
Deduce $MM_2 = 2\cos\left(\frac{\pi}{6} - \frac{t}{2}\right)$	2p
Deduce $MM_1 = 2\cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{t}{2}\right)$	2p
Deduce $MM_0 = 2\sin\frac{t}{2}$	1p
Demonstrează că $MM_2 = MM_0 + MM_1 \Leftrightarrow 2\sin\frac{\pi}{6}\sin\frac{t}{2} = \sin\frac{t}{2}$, de unde egalitatea de demonstrat este adevărată	1p

3. a) Se consideră $(a_n)_{n\geq 1}$ o progresie aritmetică cu termeni pozitivi. Demonstraţi că $\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \geq \sqrt{a_1 \cdot a_n}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

b) Se consideră $(b_n)_{n\geq 1}$ o progresie geometrică cu termeni mai mari ca 1. Demonstraţi că $lg\left(\frac{b_1+b_2+\cdots+b_n}{n}\right) \geq \sqrt{lg\, b_1 \cdot lg\, b_n}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

Soluţie:

a) $(a_n)_{n\geq 1}$ progresie aritmetică, prin urmare $\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} = \frac{\frac{(a_1+a_n)\cdot n}{2}}{n} = \frac{(a_1+a_n)}{2}$

Cum $a_n > 0$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, aplicăm inegalitatea mediilor şi obţinem $\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} = \frac{(a_1+a_n)}{2} \geq \sqrt{a_1 a_n}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

b) Cum $b_n > 0$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, aplicăm inegalitatea mediilor şi obţinem $\frac{b_1+b_2+\cdots+b_n}{n} \geq \sqrt[n]{b_1 \cdot b_2 \cdot \ldots \cdot b_n}$. Deoarece funcţia $lg{:}(0,\infty) \to \mathbb{R}$ este strict crescătoare obţinem $lg\left(\frac{b_1+b_2+\cdots+b_n}{n}\right) \geq lg\left(\sqrt[n]{b_1 \cdot b_2 \cdot \ldots \cdot b_n}\right) = \frac{lg\, b_1+lg\, b_2+\cdots+lg\, b_n}{n}$.

Dar $b_n > 1$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, deci $lg\, b_i > 0$, $\forall i = \overline{1,n}$. Mai mult, deoarece $(b_n)_{n\geq 1}$ o progresie geometrică, să preupunem de raţie q, avem $\frac{b_{n+1}}{b_n} = q, \forall n \geq 1$.

Atunci dacă considerăm şirul $(c_n)_{n\geq 1}$definit prin $c_n = lg(b_n)$, avem $c_n > 0$, $\forall n \geq 1$ şi $c_{n+1} - c_n = lg(b_{n+1}) - lg(b_n) = lg\left(\frac{b_{n+1}}{b_n}\right) = lg\, q = const$, deci $(c_n)_{n\geq 1}$ este o progresie aritmetică cu termeni pozitivi.

Aplicăm acum a) şi avem $\frac{lg\, b_1+lg\, b_2+\cdots+lg\, b_n}{n} \geq \sqrt{lg\, b_1 \cdot lg\, b_n}$

Detalii de rezolvare	**Barem asociat**
$(a_n)_{n\geq 1}$ progresie aritmetică deci $a_1+a_2+\cdots+a_n = \frac{(a_1+a_n)\cdot n}{2}$	1p
Folosind inegalitatea mediilor avem $\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} = \frac{(a_1+a_n)}{2} \geq \sqrt{a_1 a_n}, \forall n \geq 1$	2p
Din inegalitatea mediilor avem $\frac{b_1+b_2+\cdots+b_n}{n} \geq \sqrt[n]{b_1 \cdot b_2 \cdot \ldots \cdot b_n}$	1p
Arată că $lg\left(\frac{b_1+b_2+\cdots+b_n}{n}\right) \geq lg\left(\sqrt[n]{b_1 \cdot b_2 \cdot \ldots \cdot b_n}\right) = \frac{lg\, b_1+lg\, b_2+\cdots+lg\, b_n}{n}$	1p
Arată ca şirul $(c_n)_{n\geq 1}$ este o progresie aritmetică cu termeni pozitivi	1p
Aplicăm acum a) şi avem $\frac{lg\, b_1+lg\, b_2+\cdots+lg\, b_n}{n} \geq \sqrt{lg\, b_1 \cdot lg\, b_n}$	1p

4. Să se verifice dacă există funcții injective $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, cu proprietatea că $f(2023^x) + f(2025^x) = 2024,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

Soluție:

Presupunem prin reducere la absurd că există o funcție injectivă $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, cu proprietatea că $f(2023^x) + f(2025^x) = 2024,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

Dacă luăm $x = 1$ avem $f(2023) + f(2025) = 2024$ deci $f(2023) = 2024 - f(2025)$.

Dacă luăm $x = log_{2023}(2025)$ avem $f\left(2023^{log_{2023}(2025)}\right) + f\left(2025^{log_{2023}(2025)}\right) = 2024$.

Prin urmare $f(2025) + f\left(2025^{log_{2023}(2025)}\right) = 2024$, deci $f\left(2025^{log_{2023}(2025)}\right) = 2024 - f(2025)$.

Prin urmare $f\left(2025^{log_{2023}(2025)}\right) = f(2023)$.

Cum f este injectivă avem $2025^{log_{2023}(2025)} = 2023$, de unde $(log_{2023}(2025))^2 = 1$, contradicție. Prin urmare nu există funcții injective $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, cu proprietatea că $f(2023^x) + f(2025^x) = 2024,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

Detalii de rezolvare	**Barem asociat**
Presupunem prin reducere la absurd că există o funcție injectivă $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, cu proprietatea că $f(2023^x) + f(2025^x) = 2024,\ \forall x \in \mathbb{R}$.	1p
$x = 1$ rezultă $f(2023) = 2024 - f(2025)$.	1p
$x = log_{2023}(2025)$ rezultă $f\left(2025^{log_{2023}(2025)}\right) = 2024 - f(2025)$	2p
$f\left(2025^{log_{2023}(2025)}\right) = f(2023)$, f injectivă $2025^{log_{2023}(2025)} = 2023$	1p
$(log_{2023}(2025))^2 = 1$, contradicție	1p
Concluzia	1p

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
– ETAPA LOCALĂ –
08.02.2025

CLASA a XI -a

SOLUȚII ŞI BAREME ORIENTATIVE

Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte.
Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.

1. Fie $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ o matrice cu $\operatorname{Tr}(A) = 2$ și $\det(A) = 3$. Demonstrați că

$$2\det(A^2 + I_2) - \det(A^2 + 3I_2) = 4.$$

Soluție:

Utilizând relația Hamilton-Cayley, avem că $A^2 - \operatorname{Tr}(A) \cdot A + \det(A) \cdot I_2 = O_2$, deci $A^2 - 2A + 3I_2 = O_2$, de unde rezultă că $A^2 + 3I_2 = 2A$. Trecând la determinant obținem că $\det(A^2 + 3I_2) = \det(2A) = 2^2 \cdot \det(A) = 12$.

Pe de altă parte, din $A^2 - 2A + 3I_2 = O_2$, avem că $A^2 + I_2 = 2A - 2I_2 = 2(A - I_2)$, deci $\det(A^2 + I_2) = \det\big(2(A - I_2)\big) = 4 \cdot \det(A - I_2)$.

Dacă $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, atunci $A - I_2 = \begin{pmatrix} a-1 & b \\ c & d-1 \end{pmatrix}$, iar $\det(A - I_2) = (a-1)(d-1) - bc = ad - bc - (a+d) + 1 = \det(A) - \operatorname{Tr}(A) + 1 = 3 - 2 + 1 = 2$. Deducem că $\det(A^2 + I_2) = 4 \cdot \det(A - I_2) = 4 \cdot 2 = 8$.

Concluzionăm că $2\det(A^2 + I_2) - \det(A^2 + 3I_2) = 2 \cdot 8 - 12 = 4$.

Detalii de rezolvare	**Barem asociat**
Deduce din relația Hamilton-Cayley că $A^2 - 2A + 3I_2 = O_2$	1p
Obține că $\det(A^2 + 3I_2) = \det(2A) = 12$	1p
Obține că $\det(A^2 + I_2) = \det\big(2(A - I_2)\big) = 4 \cdot \det(A - I_2)$	2p
Calculează $\det(A - I_2)$ și obține $\det(A - I_2) = 2$, de unde $\det(A^2 + I_2) = 8$	2p
Concluzionează că $2\det(A^2 + I_2) - \det(A^2 + 3I_2) = 2 \cdot 8 - 12 = 4$	1p

2. Fie matricele $A,\ B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Să se arate că:

a) dacă $I_n + AB$ este inversabilă, atunci $I_n + BA$ este inversabilă.

b) dacă $I_n + (AB)^p$ este inversabilă, atunci $I_n + (BA)^p$ este inversabilă, pentru orice $p \in \mathbb{N},\ \ p \geq 2$.

Soluție:

a) Dacă $I_n + AB$ este inversabilă, atunci există $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ astfel încât

$C \cdot (I_n + AB) = (I_n + AB) \cdot C = I_n$, adică $C + CAB = C + ABC = I_n$, de unde obținem

$CAB = ABC = I_n - C$.

Avem:

$$(I_n + BA) \cdot (I_n - BCA) = I_n - BCA + BA - B(ABC)A = I_n - BCA + BA - B(I_n - C)A =$$
$$= I_n - BCA + BA - BA + BCA = I_n$$

$$(I_n - BCA) \cdot (I_n + BA) = I_n + BA - BCA - B(CAB)A = I_n - BCA + BA - B(I_n - C)A =$$
$$= I_n - BCA + BA - BA + BCA = I_n$$

Prin urmare, $I_n + BA$ este inversabilă și $(I_n + BA)^{-1} = I_n - BCA$.

b) Avem că $I_n + (AB)^p = I_n + A\left(\underbrace{BABABA...BA}_{(p-1)\ perechi}\right)B = I_n + A \cdot M$, unde $M = (BA)^{p-1} \cdot B$.

Cum $I_n + A \cdot M$ este inversabilă, din rezultatul de la punctul a) rezultă că $I_n + M \cdot A$ este inversabilă.

Deci $I_n + (BA)^{p-1} \cdot B \cdot A = I_n + (BA)^p$ este inversabilă, pentru orice $p \in \mathbb{N},\ \ p \geq 2$.

Detalii de rezolvare	**Barem asociat**
a) Cum $I_n + AB$ inversabilă ,există $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ astfel încât $C \cdot (I_n + AB) = (I_n + AB) \cdot C = I_n$ și deduce că $CAB = ABC = I_n - C$	2p
Calculează $(I_n + BA) \cdot (I_n - BCA) = I_n$	1p
Calculează $(I_n - BCA) \cdot (I_n + BA) = I_n$	1p
Deduce că $I_n + BA$ este inversabilă și $(I_n + BA)^{-1} = I_n - BCA$.	1p
b) Scrie $I_n + (AB)^p = I_n + A\left(\underbrace{BABABA...BA}_{(p-1)\ perechi}\right)B = I_n + A \cdot M$, cu $M = (BA)^{p-1} \cdot B$	1p
Folosește a) și deduce că $I_n + M \cdot A = I_n + (BA)^p$ este inversabilă	1p

3. a) Fie $a \in \mathbb{N}^*$. Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty}\left\{\sqrt{a^2n^2+(2a-1)n+1}\right\}$, unde $\{x\}$ reprezintă partea fracționară a lui x.

b) Calculați $\lim\limits_{n\to\infty}\sin^2\left(\pi\sqrt{n^2+2n+2}\right)$.

Soluție:

a) $\{x\}=x-[x]$, $\left\{\sqrt{a^2n^2+(2a-1)n+1}\right\}=\sqrt{a^2n^2+(2a-1)n+1}-\left[\sqrt{a^2n^2+(2a-1)n+1}\right]$.

$a^2n^2+(2a-1)n+1=a^2n^2+2an-n+1=a^2n^2+2an+1-n=(an+1)^2-n<(an+1)^2$

Pe de altă parte, $a^2n^2+(2a-1)n+1>a^2n^2, \quad \forall a\in\mathbb{N}^*, \forall n\in\mathbb{N}$.

Rezultă $a^2n^2<a^2n^2+(2a-1)n+1<(an+1)^2, \quad \forall a\in\mathbb{N}^*, \forall n\in\mathbb{N}$,

de unde $an<\sqrt{a^2n^2+(2a-1)n+1}<an+1, \quad \forall a\in\mathbb{N}^*, \forall n\in\mathbb{N}$,

deci $\left[\sqrt{a^2n^2+(2a-1)n+1}\right]=an$ și

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\sqrt{a^2n^2+(2a-1)n+1}\right\}=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{a^2n^2+(2a-1)n+1}-an\right)\overset{\infty-\infty}{=}\lim_{n\to\infty}\frac{a^2n^2+(2a-1)n+1-a^2n^2}{\sqrt{a^2n^2+(2a-1)n+1}+an}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(2a-1)n+1}{\sqrt{a^2n^2+(2a-1)n+1}+an}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim_{n\to\infty}\frac{n\left(2a-1+\frac{1}{n}\right)}{n\left(\sqrt{a^2+(2a-1)\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+a\right)}=\frac{2a-1}{2a}.$$

b) $$\lim_{n\to\infty}\sin^2\left(\pi\sqrt{n^2+2n+2}\right)=\lim_{n\to\infty}\sin^2\left(\pi\sqrt{n^2+2n+2}-\pi n\right)=\lim_{n\to\infty}\sin^2\left[\pi\left(\sqrt{n^2+2n+2}-n\right)\right]=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sin^2\left(\pi\frac{n^2+2n+2-n^2}{\sqrt{n^2+2n+2}+n}\right)=\lim_{n\to\infty}\sin^2\left(\pi\frac{2n+2}{\sqrt{n^2+2n+2}+n}\right)=\lim_{n\to\infty}\sin^2\left[\pi\frac{n\left(2+\frac{2}{n}\right)}{n\left(\sqrt{1+\frac{2}{n}+\frac{2}{n^2}}+1\right)}\right]=0$$

Detalii de rezolvare	Barem asociat
a) Obține $\left[\sqrt{a^2n^2+(2a-1)n+1}\right]=an$	1p
Obține că $\lim\limits_{n\to\infty}\left\{\sqrt{a^2n^2+(2a-1)n+1}\right\}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{a^2n^2+(2a-1)n+1}-an\right)$	1p
Amplifică cu conjugata expresiei $\sqrt{a^2n^2+(2a-1)n+1}-an$	1p
Finalizează limita și obține $\frac{2a-1}{2a}$	1p
b)Scrie limita ca $\lim\limits_{n\to\infty}\sin^2\left(\pi\sqrt{n^2+2n+2}-\pi n\right)$	1p
Amplifică cu conjugata expresiei $\pi\sqrt{n^2+2n+2}-\pi n$	1p
Obține limita 0	1p

4. Fie șirul $(x_n)_{n\geq 0}$ cu $x_0 = 0$ și $x_{n+1} = x_n + a + \sqrt{b^2 + 4ax_n}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, unde $a, b > 0$. Determinați $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{n^2}$.

Soluție:

Luând $n = 0$ în relația de recurență, obținem $x_1 = x_0 + a + \sqrt{b^2 + 4ax_0} = a + \sqrt{b^2} = = a + b$.

Luând $n = 1$ în relația de recurență, obținem $x_2 = x_1 + a + \sqrt{b^2 + 4ax_1} = 2a + b + +\sqrt{b^2 + 4a^2 + 4ab} = 2a + b + \sqrt{(2a + b)^2} = 4a + 2b$.

Arătăm prin inducție matematică faptul că $x_n = n^2a + nb, \forall\, n \in \mathbb{N}$. Fie propoziția $P(n)$: $x_n = n^2a + nb, \forall\, n \in \mathbb{N}$.

Etapa de verificare. $P(0)$: $x_0 = 0^2a + 0b = 0$, ceea ce e adevărat din ipoteză.

Etapa de demonstrație. Presupunem propoziția $P(k)$: $x_k = k^2a + kb, k \in \mathbb{N}$ adevărată și demonstrăm că propoziția $P(k + 1)$: $x_{k+1} = (k + 1)^2a + (k + 1)b$ este adevărată. Folosind relația de recurență, avem că $x_{k+1} = x_k + a + \sqrt{b^2 + 4ax_k} = k^2a + kb + a + +\sqrt{b^2 + 4a(k^2a + kb)} = k^2a + kb + a + \sqrt{b^2 + 4a^2k^2 + 4abk} = k^2a + kb + a + +\sqrt{(2ak + b)^2} = k^2a + kb + a + 2ak + b = a(k^2 + 2k + 1) + b(k + 1) = (k + 1)^2a + +(k + 1)b$, deci $P(k + 1)$ este adevărată. Conform principiului inducției matematice, $P(n)$ este o propoziție adevărată, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

Atunci avem că $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{n^2} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2a+nb}{n^2} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(a + \frac{b}{n}\right) = a$.

Detalii de rezolvare	**Barem asociat**
Deduce prin calcul direct că $x_1 = a + b$	1p
Deduce prin calcul direct că $x_2 = 4a + 2b$	1p
Demonstrează prin inducție matematică faptul că $x_n = n^2a + nb, \forall\, n \in \mathbb{N}$	4p
Obține că $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{n^2} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2a+nb}{n^2} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(a + \frac{b}{n}\right) = a$	1p

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
– ETAPA LOCALĂ –
08.02.2025

CLASA a XII -a

SOLUȚII ŞI BAREME ORIENTATIVE

Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte.
Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.

1. Fie $(G,\cdot)$ un grup cu elementul neutru e și $x,y\in G\setminus\{e\}$ astfel încât $\operatorname{ord}(x)=2,\ y^6=e$ și $xy=y^4x$. Să se arate că $\operatorname{ord}(y)=3$ și $xy=yx$.

Soluție:

Deoarece $\operatorname{ord}(x)=2\Rightarrow x^2=e$ și cum $xy=y^4x$ avem $(yx)^2=y(xy)x=y(y^4x)x=y^5x^2=y^5$.

Atunci, din $y^6=e$ obținem $(yx)^3=y^5(yx)=y^6x=x$. Prin urmare, $(yx)^6=\left[(yx)^3\right]^2=x^2=e.$

Dar $(yx)^2=y^5$ și deci $y^{15}=e$. Prin urmare $(y^6)^2\cdot y^3=e$, de unde $y^3=e$. Cum 3 este prim, iar $y\in G\setminus\{e\}$ avem că $\operatorname{ord}(y)=3$.

Mai mult, $xy=y^4x=y^3yx=eyx=yx.$

Detalii de rezolvare	Barem asociat
Arată că $(yx)^2=y^5$	2p
Arată că $(yx)^3=x$	1p
Arată că $(yx)^6=e.$	1p
Arată că $y^3=e$	1p
Justifică faptul că $\operatorname{ord}(y)=3$	1p
Arată că $xy=yx$	1p

2. Fie $k \in (1, +\infty)$ și $G = \left(-\infty, \frac{k^2-1}{k}\right] \cup \left[\frac{k^2+1}{k}, +\infty\right)$.

Se consideră operaţia $x * y = kxy - k^2(x+y) + k^3 + k, \forall\, x, y \in G$.

a) Să se demonstreze că $t \in G$ dacă şi numai dacă $|t-k| \geq \frac{1}{k}$, $\forall\, k \in (1, +\infty)$.

b) Arătaţi că „ $*$ ” este lege de compoziţie pe G.

c) Studiaţi existenţa elementului neutru și a elementelor simetrizabile.

Soluție:

a) $t \in G \iff t \in \left(-\infty, \frac{k^2-1}{k}\right] \cup \left[\frac{k^2+1}{k}, +\infty\right) \iff t-k \in \left(-\infty, \frac{-1}{k}\right] \cup \left[\frac{1}{k}, +\infty\right) \iff$
$|t-k| \geq \frac{1}{k}$, $\forall\, k \in (1, +\infty)$

b) Fie $x, y \in G \Rightarrow |x-k| \geq \frac{1}{k}$ și $|y-k| \geq \frac{1}{k} \Rightarrow |(x-k)(y-k)| \geq \frac{1}{k^2}$
$\Rightarrow |xy - kx - ky + k^2| \geq \frac{1}{k^2} \Rightarrow |kxy - k^2(x+y) + k^3| \geq \frac{1}{k} \Rightarrow$
$\Rightarrow |kxy - k^2(x+y) + k^3 + k - k| \geq \frac{1}{k} \Rightarrow |x * y - k| \geq \frac{1}{k} \Rightarrow x * y \in G$

c) Fie $e \in G$ astfel încât $e * x = x * e = x$, $\forall\, x \in G$

$x * e = x$, $\forall\, x \in G \Rightarrow kxe - k^2(x+e) + k^3 + k = x, \forall\, x \in G \Rightarrow$

$\Rightarrow (x-k)(ke - k^2 - 1) = 0, (\forall)\, x \in G \Rightarrow ke - k^2 - 1 = 0 \Rightarrow e = k + \frac{1}{k} \in G.$

$e * x = x$, $\forall\, x \in G \Rightarrow kex - k^2(e+x) + k^3 + k = x, \forall\, x \in G \Rightarrow$

$\Rightarrow (x-k)(ke - k^2 - 1) = 0, (\forall)\, x \in G \Rightarrow ke - k^2 - 1 = 0 \Rightarrow e = k + \frac{1}{k} \in G.$

$\Rightarrow e = k + \frac{1}{k}$ este element neutru.

$x \in G$ simetrizabil $\iff (\exists) x' \in G$ astfel încât $x' * x = x * x' = e$.

$$x * x' = e \iff kxx' - k^2(x+x') + k^3 + k = k + \frac{1}{k} \Rightarrow k^2xx' - k^3(x+x') + k^4 - 1 = 0$$

$$\Rightarrow x'k^2(x-k) = k^3x - k^4 + 1 \overset{x \neq k}{\Longrightarrow} x' = \frac{k^3x - k^4 + 1}{k^2(x-k)} \Rightarrow x' - k = \frac{k^3x - k^4 + 1}{k^2(x-k)} - k$$

$$\Rightarrow x' - k = \frac{1}{k^2(x-k)}, x \in G, x \neq k, k > 1$$

Dar $x' \in G \Rightarrow |x'-k| \geq \frac{1}{k} \Rightarrow \left|\frac{1}{k^2(x-k)}\right| \geq \frac{1}{k} \Rightarrow |x-k| \leq \frac{1}{k}, \forall\, k > 1$

Cum $|x-k| \geq \frac{1}{k}$ și $|x-k| \leq \frac{1}{k} \Rightarrow |x-k| = \frac{1}{k} \Rightarrow x = k \pm \frac{1}{k} \in G,\ \forall\, k > 1$ sunt singurele elemente simetrizabile.

Detalii de rezolvare	**Barem asociat**
a) Arată $t \in G \Leftrightarrow \|t-k\| \geq \frac{1}{k}$, $\forall\, k \in (1,+\infty)$	1p
b) Fie $x, y \in G \Rightarrow \|(x-k)(y-k)\| \geq \frac{1}{k^2}$ Arată $\|x * y - k\| \geq \frac{1}{k} \Rightarrow x * y \in G$	1p 1p
c) Ajunge la $(x-k)(ke-k^2-1)=0, (\forall)\ x \in G$ $e = k + \frac{1}{k}$ este element neutru $x' - k = \frac{1}{k^2(x-k)}$, $x \in G, x \neq k, k > 1$ $x = k \pm \frac{1}{k} \in G$ sunt singurele elemente simetrizabile	1p 1p 1p 1p

3. Determinați funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, știind că admite o primitivă F astfel încât

$$xf(x)+F(x)=\frac{x+1}{x\left(1+xe^x\right)}, \forall x\in(0,\infty) \text{ și } F(1)=1-\ln(1+e)$$

Soluție:

Dacă F este o primitivă a funcției f pe $(0,\infty)$, atunci F este derivabilă pe $(0,\infty)$ și $F'(x)=f(x),\forall x\in(0,\infty)$. Observăm că $\left(xF(x)\right)'=xf(x)+F(x),\forall x\in(0,\infty)$, deci $\left(xF(x)\right)'=\frac{x+1}{x\left(1+xe^x\right)}$ și prin urmare $xF(x):(0,\infty)\to\mathbb{R}$ este o primitivă a funcției $\frac{x+1}{x(1+xe^x)}:(0,\infty)\to\mathbb{R}$.

Calculăm atunci $I=\int\frac{x+1}{x\left(1+xe^x\right)}dx=\int\frac{(x+1)e^x}{xe^x\left(1+xe^x\right)}dx$. Facem schimbarea de variabilă $xe^x=t$

și obținem $I_t=\int\frac{1}{t(t+1)}dt=\int\frac{1}{t}dt-\int\frac{1}{t+1}dt=\ln|t|-\ln|t+1|+C$, de unde

$I=\ln\left|xe^x\right|-\ln\left|xe^x+1\right|+C=\ln\left(xe^x\right)-\ln\left(xe^x+1\right)+C$, deoarece $x\in(0,\infty)$.

Prin urmare $xF(x)=\ln\left(\frac{xe^x}{xe^x+1}\right)+C,\forall x\in(0,\infty)$, deci

$$F(x)=\frac{1}{x}\ln\left(\frac{xe^x}{xe^x+1}\right)+\frac{C}{x},\forall x\in(0,\infty).$$

Cum $F(1)=1-\ln(1+e)$ avem că $1-\ln(1+e)=\ln\left(\frac{e}{e+1}\right)+C$, deci $C=0$. Deci

$F(x)=\frac{1}{x}\ln\left(\frac{xe^x}{xe^x+1}\right),\forall x\in(0,\infty)$. Atunci

$$f(x)=\left(\frac{1}{x}\ln\left(\frac{xe^x}{xe^x+1}\right)\right)'=-\frac{1}{x^2}\ln\left(\frac{xe^x}{xe^x+1}\right)+\frac{x+1}{x^2\left(xe^x+1\right)}$$

Detalii de rezolvare	Barem asociat
Observă că $(xF(x))' = xf(x) + F(x), \forall x \in (0,\infty)$	1p
Arată că $xF(x): (0,\infty) \to \mathbb{R}$ este o primitivă a funcției $\frac{x+1}{x(1+xe^x)}: (0,\infty) \to \mathbb{R}$	1p
Calculează $I = \int \frac{x+1}{x(1+xe^x)} dx$	2p
Determină $F(x) = \frac{1}{x}\ln\left(\frac{xe^x}{xe^x+1}\right) + \frac{C}{x}, \forall x \in (0,\infty)$	1p
Arată că $C = 0$	1p
Determină f	1p

4. Calculați $\int \frac{x^2+3x+3}{(x+2)^3} e^x sinx\, dx \;, x > -2.$

Soluție:

$$I = \int \frac{x^2+3x+3}{(x+2)^3} \cdot e^x \cdot sinx\, dx = \int \frac{e^x sinx}{x+2}\, dx - \int \frac{e^x sinx}{(x+2)^2}\, dx + \int \frac{e^x sinx}{(x+2)^3}\, dx =$$
$$= I_1 - I_2 + I_3$$

$$I_1 = \int \frac{e^x \sin x}{x+2} dx = \int \frac{1}{x+2}\left[\frac{1}{2} e^x(\sin x - \cos x)\right]' dx =$$
$$= \frac{e^x(sinx - cosx)}{2(x+2)} + \frac{1}{2}\int \frac{e^x(sinx - \cos x)}{(x+2)^2}\, dx$$
$$I_3 = \int \frac{e^x sinx}{(x+2)^3}\, dx = \int e^x sinx\left(-\frac{1}{2(x+2)^2}\right)'\, dx =$$
$$= -\frac{e^x sinx}{2(x+2)^2} + \frac{1}{2}\int \frac{(e^x sinx)'}{(x+2)^2} dx = -\frac{e^x sinx}{2(x+2)^2} + \frac{1}{2}\int \frac{e^x(\sin x + \cos x)}{(x+2)^2} dx$$

Deci,

$$I = I_1 - I_2 + I_3 =$$
$$= \frac{e^x(sinx - cosx)}{2(x+2)} + \frac{1}{2}\int \frac{e^x(sinx - \cos x)}{(x+2)^2}\, dx - \int \frac{e^x sinx}{(x+2)^2}\, dx - \frac{e^x sinx}{2(x+2)^2} +$$
$$+ \frac{1}{2}\int \frac{e^x(\sin x + \cos x)}{(x+2)^2} dx = \frac{e^x(sinx - cosx)}{2(x+2)} - \frac{e^x sinx}{2(x+2)^2} + C$$

Detalii de rezolvare	Barem asociat
$I = \int \frac{e^x sinx}{x+2}\, dx - \int \frac{e^x sinx}{(x+2)^2}\, dx + \int \frac{e^x sinx}{(x+2)^3}\, dx = I_1 - I_2 + I_3$	2p
$I_1 = \frac{e^x(sinx - cosx)}{2(x+2)} + \frac{1}{2}\int \frac{e^x(sinx - \cos x)}{(x+2)^2}\, dx$	2p
$I_3 = -\frac{e^x sinx}{2(x+2)^2} + \frac{1}{2}\int \frac{e^x(\sin x + \cos x)}{(x+2)^2} dx$	2p
$I = \frac{e^x(sinx - cosx)}{2(x+2)} - \frac{e^x sinx}{2(x+2)^2} + C$	1p