OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
– ETAPA LOCALĂ –
08.02.2025

CLASA a V-a

SOLUȚII ŞI BAREME ORIENTATIVE

Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte.
Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.

1. Fie numerele: $a = 2024 + 2 \cdot (1 + 2 + 3 + \cdots + 2023)$ și $b = 1 + 3 + 5 + \cdots + 2023$.
Arătați că: $a = 4 \cdot b$.

Soluție:

Calculând:

- $a = 2024 + 2 \cdot [2023 \cdot (2023 + 1)] : 2 = 2024 + 2023 \cdot 2024 = 2024 \cdot (1 + 2023) = 2024 \cdot 2024 = 2024^2$
- $b = 1+(2\cdot1+1)+(2\cdot2+1)+\ldots+(2\cdot1011+1)=2\cdot(1+2+3+\ldots1011)+1012\cdot1 = 2\cdot[1011\cdot(1011+1)]:2+1012 = 1011\cdot1012+1012\cdot1 = 1012\cdot(1011+1) = 1012^2$.
- Scrie $a = 4 \cdot 1012^2 = 4 \cdot b$.

Detalii de rezolvare	**Barem asociat**
Deduce că $a = 2024 + 2 \cdot [2023 \cdot (2023 + 1)]: 2 = 2024 + 2023 \cdot 2024 = 2024 \cdot (1 + 2023) = 2024 \cdot 2024 = 2024^2$	2p
Deduce $b = 1 + (2 \cdot 1 + 1) + (2 \cdot 2 + 1)+\ldots+(2 \cdot 1011 + 1) = 2 \cdot (1 + 2 + 3+\ldots1011) + 1012 \cdot 1$	2p
Calculează $b = 1011 \cdot 1012 + 1012 \cdot 1 = 1012 \cdot (1011 + 1) = 1012^2$	2p
Arată că $a = 4 \cdot b$.	1p

2. Determinați numerele naturale de forma $\overline{ab}$ pentru care are loc egalitatea

$$\overline{17ab} + \overline{ab57} = 5191.$$

Soluție:

Folosim scrierea zecimală:

$$\overline{17ab} + \overline{ab57} = 1700 + \overline{ab} + \overline{ab00} + 57 = 1757 + \overline{abab}$$

Rezultă: $\overline{abab} + 1757 = 5191$

$$\overline{abab} = 5191 - 1757 = 3434$$

Atunci $\overline{ab} = 34$

Detalii de rezolvare	**Barem asociat**
$\overline{17ab} + \overline{ab57} = 1700 + \overline{ab} + \overline{ab00} + 57 = 1757 + \overline{abab}$	2p
$\overline{abab} + 1757 = 5191$	2p
$\overline{abab} = 5191 - 1757 = 3434$	2p
Atunci $\overline{ab} = 34$	1p

3. Știind că $2^{12n+18} + 4^{6n+9} + 8^{4n+6} + 64^{2n+3} = 2^{9(n+10)+6002}$

a) Aflați n număr natural.

b) Pentru n găsit anterior, arătați că $S = 2022^n + 2023^n + 2024^n + 2025^n$ nu este pătrat perfect.

Soluție:

a) Scriem numărul: $2^{12n+18} + (2^2)^{6n+9} + (2^3)^{4n+6} + (2^6)^{2n+3} = 2^{12n+18} + 2^{12n+18} + 2^{12n+18} + 2^{12n+18} = 4 \cdot 2^{12n+18} = 2^2 \cdot 2^{12n+18} = 2^{12n+20}$

$2^{9(n+10)+6002} = 2^{9n+90+6002} = 2^{9n+6092}$

Atunci

$12n + 20 = 9n + 6092$

$3n = 6072$

$n = 2024$

b) Determină

$U(S) = U[U(2^n) + U(3^n) + U(4^n) + U(5^n)] = U[U(2^{2024}) + U(3^{2024}) + U(4^{2024}) + U(5^{2024})] = U(6 + 1 + 6 + 5) = 8$

Deci $U(S) = 8$, atunci S nu este pătrat perfect.

Detalii de rezolvare	**Barem asociat**
a) $2^{12n+18} + (2^2)^{6n+9} + (2^3)^{4n+6} + (2^6)^{2n+3} = 2^{12n+18} + 2^{12n+18} + 2^{12n+18} + 2^{12n+18} = 4 \cdot 2^{12n+18} = 2^2 \cdot 2^{12n+18} = 2^{12n+20}$	2p
$2^{9(n+10)+6002} = 2^{9n+90+6002} = 2^{9n+6092}$	1p
Atunci $12n + 20 = 9n + 6092$ $3n = 6072$ $n = 2024$	1p
b) $U(S) = U[U(2^n) + U(3^n) + U(4^n) + U(5^n)] =$ $= U[U(2^{2024}) + U(3^{2024}) + U(4^{2024}) + U(5^{2024})] =$	1p
$= U(6 + 1 + 6 + 5) = 8$	1 p
Deci $U(S) = 8$, atunci S nu este pătrat perfect	1 p

4. Într-o cutie sunt 28 de bile roșii, galbene și verzi, astfel încât oricum am lua 21 de bile, vom găsi printre ele bile de toate culorile. Știind că numărul bilelor roșii este impar și este egal cu numărul bilelor galbene, aflați câte bile sunt din fiecare culoare.

Soluție:

Notează r - nr. bile roșii, g - nr. bile galbene și cu v - nr. bile verzi:

$$r = nr.impar$$

$$r = g$$

$$r + g + v = 28$$

$$r + r + v = 28$$

Din $2 \cdot r + v = 28$, $2 \cdot r = nr.par$ și $28 = nr.par$, rezultă ca v este număr par.

Din faptul că oricum am lua 21 de bile, avem bile de toate culorile, distingem următoarele cazuri:

Caz 1: Dacă $v = 2$ sau 4 sau 6, atunci $r + g > 21$, deci putem avea bile doar de două culori (roșii și galbene).

Caz 2: Dacă $v = 8$, atunci $r + g = 20$, de unde rezultă că $r = g = 10$, care nu sunt numere impare.

Caz 3: Dacă $v = 10$, atunci $r + g = 28 - 10$, de unde rezută că $r = g = 9$, care sunt numere impare și sunt soluție.

Caz 4: Dacă $v = 12$, atunci $r + g = 28 - 12 = 16$, de unde rezultă că $r = g = 8$, care nu sunt numere impare.

Caz 5: Dacă $v = 14$ sau 16 sau 18 sau 20 sau 22 sau 24 sau 26, atunci $r + g \leq 14$, de unde rezultă că $r = g \leq 7$ și putem avea doar bile de două culori (verzi și una din celelalte culori) sau de o culoare.

Deci rezultatul este $r = g = 9$ și $v = 10$.

Detalii de rezolvare	**Barem asociat**
Notează r - nr.bile roșii, g - nr. bile galbene și cu v - nr. bile verzi și scrie relația $r = g$	1p
Scrie relațiile: $r + g + v = 28$, $r + r + v = 28$	1p
Scrie relațiile $2 \cdot r + v = 28$, precizează că $2 \cdot r$ și 28 sunt numere pare, de unde rezultă că v este număr par	1p
Argumentează că din faptul că oricum am lua 21 de bile, avem bile de toate culorile, distingem cazurile: Caz 1: Dacă $v = 2$ sau 4 sau 6, atunci $r + g > 21$, deci putem avea bile doar de două culori (roșii și galbene). Caz 2: Dacă $v = 8$, atunci $r + g = 20$, de unde rezultă că $r = g = 10$, care nu sunt numere impare.	1p
Caz 3: Dacă $v = 10$, atunci $r + g = 28 - 10$, de unde rezută că $r = g = 9$, care sunt numere impare și sunt soluție. Caz 4: Dacă $v = 12$, atunci $r + g = 28 - 12 = 16$, de unde rezultă că $r = g = 8$, care nu sunt numere impare.	1p
Caz 5: Dacă $v = 14$ sau 16 sau 18 sau 20 sau 22 sau 24 sau 26, atunci $r + g \leq 14$, de unde rezultă că $r = g \leq 7$ și putem avea doar bile de două culori (verzi și una din celelalte culori) sau de o culoare.	1p
Deci rezultatul este $r = g = 9$ și $v = 10$.	1p

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
– ETAPA LOCALĂ –
08.02.2025

CLASA a VI -a

SOLUȚII ŞI BAREME ORIENTATIVE

Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte.
Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.

1. Se consideră mulțimile A şi B. Aflați cardinalul mulțimii A, știind că sunt îndeplinite simultan condițiile:

1) $card(A-B)=5$;

2) $card(B)=20$;

3) $card(A\cup B)-card(A)=9$.

Soluție:

Folosind $card(A\cup B)=card(A)+card(B)-card(A\cap B)$ și condiția 3) din enunț obținem $card(B)-card(A\cap B)=9$.

Cum $card(B)=20$ rezultă $card(A\cap B)=11$, iar din $card(A-B)=5$, se obține $card(A)=16$.

Detalii de rezolvare	**Barem asociat**
$card(A\cup B)=card(A)+card(B)-card(A\cap B)$	2p
$card(B)-card(A\cap B)=9$	2p
Din $card(A\cap B)=11$ și $card(A-B)=5$, rezultă $card(A)=16$	3p

2. În portul Constanța de la Marea Neagră erau ancorate patru șalupe, care făceau curse regulate către diferite destinații. În data de 15 iulie 2024, la amiază, toate patru au părăsit în același timp portul. Se știe că prima șalupă revine în portul Constanța din 4 în 4 săptămâni, a doua din 8 în 8 săptămâni, a treia la fiecare 12 săptămâni, iar a patra la fiecare 16 săptămâni. În ce dată se vor întâlni din nou, în portul Constanța, toate cele patru șalupe?

Soluție:

Calculăm [4, 8, 12, 16] = 48, deci peste 48 de săptămâni se vor întâlni din nou.

48 săptămâni = 336 zile, iar 11 luni < 336 zile < 12 luni.

Cum lunile iulie, august, octombrie, decembrie, ianuarie, martie și mai au 31 zile, februarie 28 zile, iar celelalte având 30 zile, rezultă că cele patru șalupe se vor întâlni în data de 16 iunie 2025.

Detalii de rezolvare	**Barem asociat**
[4, 8, 12, 16] = 48..	2p
48 săptămâni = 336 zile...	2p
11 luni < 336 zile < 12 luni	1p
Șalupele se vor întâlni în data de 16 iunie 2025...	2p

3. În jurul punctului O se consideră unghiurile $\sphericalangle AOB$, $\sphericalangle BOC$, $\sphericalangle COD$, $\sphericalangle DOA$ cu $m(\sphericalangle AOB) = 138^\circ$ și $m(\sphericalangle COD) = 122^\circ$. Știind că [$OE$ este bisectoarea unghiului $\sphericalangle AOD$, iar [OF este bisectoarea unghiului $\sphericalangle BOC$, aflați:

a) măsura unghiului $\sphericalangle EOF$;
b) măsurile unghiurilor $\sphericalangle AOD$ și $\sphericalangle BOC$ dacă semidreapta opusă semidreptei [OE este bisectoarea unghiului $\sphericalangle BOF$.

Soluție:

a) Din $m(\sphericalangle AOB) + m(\sphericalangle BOC) + m(\sphericalangle COD) + m(\sphericalangle DOA) = 360^\circ$ obținem

$m(\sphericalangle AOD) + m(\sphericalangle BOC) = 100^\circ$.

$$m(\sphericalangle EOF) = m(\sphericalangle EOD) + m(\sphericalangle DOC) + m(\sphericalangle COF) = \frac{m(\sphericalangle AOD)+m(\sphericalangle BOC)}{2} + m(\sphericalangle DOC) =$$

$$= \frac{100^\circ}{2} + 122^\circ = 172^\circ.$$

b) Fie [OG bisectoarea $\sphericalangle BOF$.

Cum [OE , [OG semidrepte opuse $\Rightarrow m(\sphericalangle EOG) = 180^\circ$.

$m(\sphericalangle EOG) = m(\sphericalangle EOF) + m(\sphericalangle FOG) \Rightarrow m(\sphericalangle FOG) = 8^\circ$.

[OG bisectoarea $\sphericalangle BOF \Rightarrow m(\sphericalangle BOF) = 16^\circ$.

[OF bisectoarea $\sphericalangle BOC \Rightarrow m(\sphericalangle BOC) = 32^\circ$.

Cum $m(\sphericalangle AOD) + m(\sphericalangle BOC) = 100^\circ$, obținem $m(\sphericalangle AOD) = 68^\circ$.

Detalii de rezolvare	**Barem asociat**
a) $m(\sphericalangle AOB) + m(\sphericalangle BOC) + m(\sphericalangle COD) + m(\sphericalangle DOA) = 360^\circ$ **.** Rezultă $m(\sphericalangle AOD) + m(\sphericalangle BOC) = 100^\circ$	1p
$m(\sphericalangle EOF) = m(\sphericalangle EOD) + m(\sphericalangle DOC) + m(\sphericalangle COF) = \frac{100^\circ}{2} + 122^\circ = 172^\circ$	2p
b) Fie [OG bisectoarea $\sphericalangle BOF$. Cum [OE , [OG semidrepte opuse $\Rightarrow m(\sphericalangle EOG) = 180^\circ$. $m(\sphericalangle EOG) = m(\sphericalangle EOF) + m(\sphericalangle FOG) \Rightarrow m(\sphericalangle FOG) = 8^\circ$	1p
[OG bisectoarea $\sphericalangle BOF \Rightarrow m(\sphericalangle BOF) = 16^\circ$.	1p
[OF bisectoarea $\sphericalangle BOC \Rightarrow m(\sphericalangle BOC) = 32^\circ$.	1p
Se obține $m(\sphericalangle AOD) = 68^\circ$.	1p

4. Aflați numerele $\overline{ab}$ știind că $\dfrac{\overline{ab}+4b}{a+2b} \in \mathbb{N}$ și $\dfrac{\overline{ba}+4a}{2a+b} \in \mathbb{N}$.

Soluție:

$\overline{ab} = 10a + b$, $\overline{ba} = 10b + a$, $a \neq 0$, $b \neq 0$.

Atunci $x = \dfrac{\overline{ab}+4b}{a+2b} = \dfrac{5(2a+b)}{a+2b}$, iar $y = \dfrac{\overline{ba}+4a}{2a+b} = \dfrac{5(2b+a)}{2a+b}$.

Avem $x \cdot y = 25$, iar cum $x, y \in \mathbb{N}$, obținem $(x, y) \in \{(1,25), (5, 5), (25, 1)\}$.

Pentru $(x, y) = (1, 25)$ se obține $a = b = 0$ - nu convine.

Pentru $(x, y) = (5, 5)$ se obține $a = b$.

Pentru $(x, y) = (25, 1)$ se obține $a = b = 0$ - nu convine.

Deci $\overline{ab} \in \{11, 22, 33, ..., 99\}$.

Detalii de rezolvare	Barem asociat
$\overline{ab} = 10a + b$, $\overline{ba} = 10b + a$, $a \neq 0$, $b \neq 0$.	1p
$x = \dfrac{\overline{ab}+4b}{a+2b} = \dfrac{5(2a+b)}{a+2b}$ și $y = \dfrac{\overline{ba}+4a}{2a+b} = \dfrac{5(2b+a)}{2a+b}$	2p
$x \cdot y = 25$. Cum $x, y \in \mathbb{N}$, obținem $(x, y) \in \{(1,25), (5, 5), (25, 1)\}$......................	2p
$\overline{ab} \in \{11, 22, ..., 99\}$..	2p

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
– ETAPA LOCALĂ –
08.02.2025

CLASA a VII -a

SOLUȚII ŞI BAREME ORIENTATIVE

Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte.
Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.

1. a) Se consideră numerele

$$a=\left(\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{2}{\sqrt{12}}+\frac{3}{\sqrt{27}}+\frac{4}{\sqrt{48}}\right):\frac{2}{3} \text{ și } b=\frac{\sqrt{26^2-10^2}}{\sqrt{20^2-16^2}}\cdot\frac{3\sqrt{2}}{2}+\left|2\sqrt{5}-5\right|-\left(5-2\sqrt{5}\right).$$

Calculați $(a+b)\cdot|a-b|$.

b) Calculați pătratul numărului c, unde

$$c=\frac{1}{1+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{119}+\sqrt{121}}.$$

Soluție:

a) $$a=\left(\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{^{(2}2}{2\sqrt{3}}+\frac{^{(3}3}{3\sqrt{3}}+\frac{^{(4}4}{4\sqrt{3}}\right):\frac{2}{3}=\left(\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{4}{\sqrt{3}}\cdot\frac{3}{2}=\frac{^{\sqrt{3})}6}{\sqrt{3}}=\frac{6\sqrt{3}}{3}=2\sqrt{3}$$

$$b=\frac{\sqrt{576}}{\sqrt{144}}\cdot\frac{3\sqrt{2}}{2}+\left(5-2\sqrt{5}\right)-\left(5-2\sqrt{5}\right)=\frac{24}{12}\cdot\frac{3\sqrt{2}}{2}=3\sqrt{2}$$

$$(a+b)\cdot|a-b|=\left(2\sqrt{3}+3\sqrt{2}\right)\cdot\left|\underbrace{2\sqrt{3}-3\sqrt{2}}_{<0}\right|=\left(2\sqrt{3}+3\sqrt{2}\right)\cdot\left(3\sqrt{2}-2\sqrt{3}\right)$$

$$=\left(3\sqrt{2}\right)^2-\left(2\sqrt{3}\right)^2=18-12=6.$$

b) $$c=\frac{1-\sqrt{3}}{1-3}+\frac{\sqrt{3}-\sqrt{5}}{3-5}+\frac{\sqrt{5}-\sqrt{7}}{5-7}+\ldots+\frac{\sqrt{119}-\sqrt{121}}{119-121}$$

$$c=\frac{1-\sqrt{3}+\sqrt{3}-\sqrt{5}+\sqrt{5}-\sqrt{7}+\ldots+\sqrt{119}-\sqrt{121}}{-2}=\frac{1-11}{-2}=5$$

$$c^2=25$$

Detalii de rezolvare	Barem asociat
a) $a=2\sqrt{3}$	1p
$b=3\sqrt{2}$	1p
$(a+b)\cdot\lvert a-b\rvert=6$	2p
b) $c=\dfrac{1-\sqrt{3}+\sqrt{3}-\sqrt{5}+\sqrt{5}-\sqrt{7}+\ldots+\sqrt{119}-\sqrt{121}}{-2}=\dfrac{1-11}{-2}=5$	2p
$c^2=25$	1p

2. Determinați numerele raționale m și n pentru care are loc egalitatea

$$\frac{m}{\sqrt{5}}\cdot\sqrt{45-10\sqrt{14}}+n\sqrt{9+2\sqrt{14}}=\sqrt{2}+9\sqrt{7}.$$

Soluție:

Egalitatea din enunț este echivalentă cu $m\cdot\sqrt{9-2\sqrt{14}}+n\sqrt{9+2\sqrt{14}}=\sqrt{2}+9\sqrt{7}$.

$$\sqrt{9-2\sqrt{14}}=\sqrt{7-2\sqrt{7}\cdot\sqrt{2}+2}=\sqrt{\left(\sqrt{7}-\sqrt{2}\right)^2}=\left|\sqrt{7}-\sqrt{2}\right|=\sqrt{7}-\sqrt{2}$$

$$\sqrt{9+2\sqrt{14}}=\sqrt{7+2\sqrt{7}\cdot\sqrt{2}+2}=\sqrt{\left(\sqrt{7}+\sqrt{2}\right)^2}=\left|\sqrt{7}+\sqrt{2}\right|=\sqrt{7}+\sqrt{2}$$

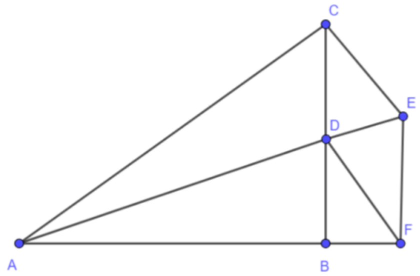
Avem $m\cdot\left(\sqrt{7}-\sqrt{2}\right)+n\left(\sqrt{7}+\sqrt{2}\right)=\sqrt{2}+9\sqrt{7}\Leftrightarrow(n-m)\sqrt{2}+(n+m)\sqrt{7}=\sqrt{2}+9\sqrt{7}$. Cum numerele m și n sunt numerele raționale avem $\begin{cases}n-m=1\\n+m=9\end{cases}$ de unde obținem $m=4$ și $n=5$.

Detalii de rezolvare	**Barem asociat**
Deduce $m\cdot\sqrt{9-2\sqrt{14}}+n\sqrt{9+2\sqrt{14}}=\sqrt{2}+9\sqrt{7}$	1p
Arată că $\sqrt{9-2\sqrt{14}}=\sqrt{7}-\sqrt{2}$ și $\sqrt{9+2\sqrt{14}}=\sqrt{7}+\sqrt{2}$	2p
Obține $(n-m)\sqrt{2}+(n+m)\sqrt{7}=\sqrt{2}+9\sqrt{7}$	2p
Deduce $\begin{cases}n-m=1\\n+m=9\end{cases}$ și obține $m=4$ și $n=5$	2p

3. În triunghiul ABC, $\sphericalangle B = 90^0$, bisectoarea unghiului A intersectează latura BC în D și perpendiculara în C, pe AC, în E. Fie $EF \parallel BC$, $F \in AB$.

a) Arătați că ΔCDE este isoscel.

b) Demonstrați că $CDFE$ este romb.



Soluție:

a) AE bisectoarea $\sphericalangle A \Rightarrow \sphericalangle CAE = \sphericalangle EAB = \frac{1}{2} \cdot \sphericalangle CAB = \alpha$

În ΔABD dreptunghic, $\sphericalangle B = 90^0$avem $\sphericalangle ADB = 90^0 - \alpha$ (1)

$EC \perp AC \Rightarrow \Delta ACE$ dreptunghic, $\sphericalangle ACE = 90^0$ și $\sphericalangle AEC = 90^0 - \alpha$ (2).

$AE \cap BC = \{D\} \Rightarrow \sphericalangle ADB = \sphericalangle CDE = 90^0 - \alpha$ (3), opuse la vârf.

Din (2) și (3) avem $\sphericalangle DEC = \sphericalangle CDE \Rightarrow \Delta CDE$ isoscel, $CD \equiv CE$ (4).

b) $\left.\begin{array}{l} EF \parallel BC, F \in AB \\ CB \perp AB \end{array}\right\} \Rightarrow EF \perp AF \Rightarrow \sphericalangle AFE = 90^0$

$$\left.\begin{array}{l} \sphericalangle AFE \equiv \sphericalangle ACE (= 90^0) \\ \sphericalangle EAF \equiv \sphericalangle CAE (= \alpha) \\ AE \quad latură \quad comună \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta AFE \equiv \Delta ACE \Rightarrow EF \equiv CE, (5).$$

Din (4) și (5) avem $CD \equiv EF$ și cum $CD \parallel EF$ avem $CDFE$ paralelogram.

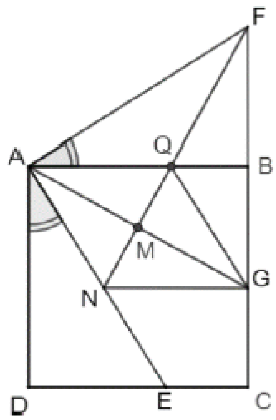
Din $CDFE$ paralelogram și $CD \equiv CE$ avem că $CDFE$ este romb.

Detalii de rezolvare	**Barem asociat**
a) Notează $\sphericalangle CAE = \sphericalangle EAB = \alpha$	1p
Argumentează $\sphericalangle CDE = \sphericalangle DEC = 90^0 - \alpha$ de unde ΔCDE isoscel, $CD \equiv CE$ …….	2p
b) $\left.\begin{array}{l} EF \parallel BC, F \in AB \\ CB \perp AB \end{array}\right\} \Rightarrow EF \perp AF \Rightarrow \sphericalangle AFE = 90^0$..	1p
Arată că $\Delta AFE \equiv \Delta ACE \Rightarrow EF \equiv CE$	1p
Deduce că $CDFE$ paralelogram	1p
Deduce că $CDFE$ romb	1p

4. Fie $ABCD$ pătrat și punctul E aparține segmentului DC. Fie $F \in BC$ astfel încât B să fie între F și C, iar $DE = BF$. Fie G aparține segmentului BC astfel încât $AE = FG$. Notăm M mijlocul segmentului AG și $AE \cap FM = \{N\}$.

a) Arătați că $GQ \perp AF$, unde $FM \cap AB = \{Q\}$;

b) Arătați că $ABGN$ este trapez dreptunghic.



Soluție:

a) Avem $\left.\begin{matrix} \sphericalangle D \equiv \sphericalangle B (= 90^0) \\ AD \equiv AB \\ DE \equiv BF \end{matrix}\right\} \Rightarrow \Delta ADE \equiv \Delta ABF \Rightarrow AE \equiv AF.$

Cum $\left.\begin{matrix} AE \equiv FG \\ AE \equiv AF \end{matrix}\right\} \Rightarrow FG \equiv AF \Rightarrow \Delta AFG$ este isoscel.

Din M mijlocul segmentului AG avem FM mediană în ΔAFG isoscel de unde FM înălțime în ΔAFG. Cum $AB \perp FG$ avem că AB înălțime în ΔAFG și $FM \cap AB = \{Q\}$ avem că Q este ortocentru în ΔAFG de unde $GQ \perp AF$.

b) FM mediană în ΔAFG isoscel de unde avem FM bisectoare în ΔAFG rezultă că $\sphericalangle AFN \equiv \sphericalangle GFN$.

$$\left.\begin{matrix} AF \equiv FG \\ \sphericalangle AFN \equiv \sphericalangle GFN \\ FN \quad latura \quad comună \end{matrix}\right\} \Rightarrow \Delta AFN \equiv \Delta GFN \Rightarrow \sphericalangle NAF \equiv \sphericalangle NGF$$

Cum $\Delta ADE \equiv \Delta ABF$ avem $\sphericalangle DAE \equiv \sphericalangle BAF$.

$$\sphericalangle NAF = \sphericalangle NAB + \sphericalangle BAF = \sphericalangle NAB + \sphericalangle DAE = \sphericalangle BAD = 90^0 = \sphericalangle NGF \Rightarrow NG \perp BC$$

Avem $\left.\begin{matrix} AB \perp FC \\ NG \perp FC \end{matrix}\right\} \Rightarrow AB \parallel NG$ și $\sphericalangle ABG = 90^0$ de unde $ABGN$ este trapez dreptunghic.

Detalii de rezolvare	**Barem asociat**
a) Argumentează faptul că ΔAFG este isoscel ……………….…….......…………………	1p
Deduce că FM înălțime în ΔAFG isoscel, ...……......………………......………	1p
Argumentează că Q este ortocentru în ΔAFG de unde $GQ \perp AF$	1p
b) Arată că $\sphericalangle AFN \equiv \sphericalangle GFN$	1p
Argumentează că $\Delta AFN \equiv \Delta GFN$ de unde $\sphericalangle NAF \equiv \sphericalangle NGF$.................................	1p
Deduce că $\sphericalangle NGF = 90^0$...	1p
Deduce că $AB \parallel NG$ și argumentează că $ABGN$ este trapez dreptunghic	1p

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
– ETAPA LOCALĂ –
08.02.2025

CLASA a VIII -a

SOLUȚII ŞI BAREME ORIENTATIVE

Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte.
Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.

1. Se consideră un număr natural n și definim mulțimea $A_n = \{x \in \mathbb{R} \mid |x+n-6| \leq 3n+4\}$.

(3p) a) Scrieți mulțimea A_1 sub formă de interval.

(4p) b) Aflați numărul natural n pentru care A_n conține exact 609 numere întregi.

Soluție:

a) Calculând A_1 obținem $|x+1-6| \leq 3+4$, de unde rezultă $|x-5| \leq 7$și atunci $x \in [-2; 12]$, deci $A_1 = [-2; 12]$.

b) Din proprietatea caracteristică a elementelor mulțimii A_n avem $|x+n-6| \leq 3n+4$, de unde rezultă că $-3n-4 \leq x+n-6 \leq 3n+4$ deci $-4n+2 \leq x \leq 2n+10$.

Deducem că $A_n = [-4n+2; 2n+10]$.

Deoarece intervalul este închis la ambele capete atunci înseamnă că numărul de numere întregi din intervalul respectiv va fi: $2n+10-(-4n+2)+1$.

Cum A_n conține exact 609 numere întregi avem $2n+10-(-4n+2)+1 = 609$ de unde obținem că n =100.

Detalii de rezolvare	**Barem asociat**
a) Deduce $A_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid |x+1-6| \leq 3 \cdot 1+4\} \Leftrightarrow -7 \leq x-5 \leq 7$..............	2p
Arată că $x \in [-2; 12] \Rightarrow A_1 = [-2; 12]$	1p
b) Deduce că $A_n = [-4n+2; 2n+10]$..	2p
Arată că $2n+10-(-4n+2)+1 = 609$...	1p
Calculează *n = 100*	1p

2. Fie $a=\sqrt{\frac{2025+x}{2025-x}}+\sqrt{\frac{2025-x}{2025+x}}$ și $b=\sqrt{\frac{2025+x}{2025-x}}-\sqrt{\frac{2025-x}{2025+x}}$, unde $x<2025$ este un număr natural prim. Determinați x pentru care numărul $\frac{a}{b}$ este întreg.

Soluție:

Se știe că $a=\sqrt{\frac{2025+x}{2025-x}}+\sqrt{\frac{2025-x}{2025+x}}$ și $b=\sqrt{\frac{2025+x}{2025-x}}-\sqrt{\frac{2025-x}{2025+x}}$.

Atunci $\frac{a}{b}=\dfrac{\sqrt{\frac{2025+x}{2025-x}}+\sqrt{\frac{2025-x}{2025+x}}}{\sqrt{\frac{2025+x}{2025-x}}-\sqrt{\frac{2025-x}{2025+x}}}$

Raționalizăm numitorul și obținem că: $\frac{a}{b}=\dfrac{\left(\sqrt{\frac{2025+x}{2025-x}}+\sqrt{\frac{2025-x}{2025+x}}\right)^2}{\left(\sqrt{\frac{2025+x}{2025-x}}\right)^2-\left(\sqrt{\frac{2025-x}{2025+x}}\right)^2}$.

Se aplică formulele de calcul prescurtat și rezultă că *:*

$$\frac{a}{b}=\frac{\left(\sqrt{\frac{2025+x}{2025-x}}\right)^2+2\cdot\sqrt{\frac{2025+x}{2025-x}}\cdot\sqrt{\frac{2025-x}{2025+x}}+\left(\sqrt{\frac{2025-x}{2025+x}}\right)^2}{\frac{2025+x}{2025-x}-\frac{2025-x}{2025+x}}$$

$$\Rightarrow\frac{a}{b}=\frac{\frac{2025+x}{2025-x}+2\cdot\sqrt{\frac{2025+x}{2025-x}\cdot\frac{2025-x}{2025+x}}+\frac{2025-x}{2025+x}}{\frac{2025+x}{2025-x}-\frac{2025-x}{2025+x}}$$

Aducem la numitor comun și obținem *:*

$$\frac{a}{b}=\frac{\frac{(2025+x)^2+2(2025+x)(2025-x)+(2025-x)^2}{(2025+x)(2025-x)}}{\frac{(2025+x)^2-(2025-x)^2}{(2025+x)(2025-x)}}$$

Efectuăm calculele $\Rightarrow\frac{a}{b}=\dfrac{\frac{(2025+x+2025-x)^2}{(2025+x)(2025-x)}}{\frac{(2025+x+2025-x)(2025+x-2025+x)}{(2025+x)(2025-x)}}$

$$\Rightarrow\frac{a}{b}=\frac{\frac{(2\cdot2025)^2}{(2025+x)(2025-x)}}{\frac{(2\cdot2025)(2\cdot x)}{(2025+x)(2025-x)}}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{(2 \cdot 2025)^2}{(2025+x)(2025-x)} \cdot \frac{(2025+x)(2025-x)}{4 \cdot 2025 \cdot x}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{4 \cdot 2025^2}{(2025+x)(2025-x)} \cdot \frac{(2025+x)(2025-x)}{4 \cdot 2025 \cdot x}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{2025}{x}$$

Punem condiția ca $\frac{a}{b} \in \mathbb{Z} \Rightarrow \frac{2025}{x} \in \mathbb{Z} \Rightarrow x$ este un divizor al lui 2025 $\Rightarrow x \in D_{2025}$.

Se știe că $x < 2025$ și x număr prim deci vom lua doar divizorii primi ai lui 2025 care apar din descompunerea în factori primi a lui *2025*, adică $2025 = 3^4 \cdot 5^2$, de unde rezultă că $x \in \{3; 5\}$

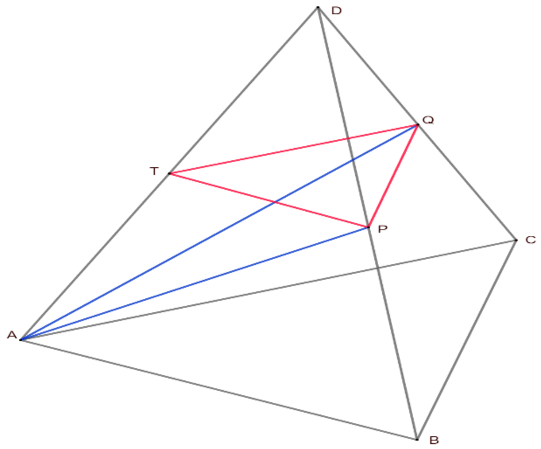
Detalii de rezolvare	Barem asociat
Arată că $\frac{a}{b} = \frac{\left(\sqrt{\frac{2025+x}{2025-x}}+\sqrt{\frac{2025-x}{2025+x}}\right)^2}{\left(\sqrt{\frac{2025+x}{2025-x}}\right)^2-\left(\sqrt{\frac{2025-x}{2025+x}}\right)^2}$	2p
Efectuează calculele și obține $\frac{a}{b} = \frac{2025}{x}$	2p
Deduce că $x \in D_{2025}$ și x număr prim	2p
Arată că $x \in \{3; 5\}$	1p

3. Fie triunghiul echilateral ABC cu $AB = 15\sqrt{2}\,cm$ și $D \notin (ABC)$, astfel încât $AD = BD = CD$=15 cm. În triunghiul ABD, semidreapta AP este bisectoarea $\sphericalangle DAB$, $P \in BD$, iar în triunghiul ADC, semidreapta AQ este bisectoarea $\sphericalangle DAC$, $Q \in CD$. Se consideră $T \in AD$, astfel încât $\frac{TD}{TA} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Să se arate că: a) $(PTQ) \| (ABC)$

b) $AD \perp PQ$

Soluție:



a) În Δ ADB, AP - bisectoarea $\sphericalangle$ DAB $\xRightarrow{T\ bis} \frac{DP}{PB} = \frac{AD}{AB} \Rightarrow \frac{DP}{PB} = \frac{15}{15\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{DP}{PB} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Se știe că: $\frac{TD}{TA} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \frac{TD}{TA} = \frac{DP}{PB}$

$\xRightarrow{R.T.Th} TP \parallel AB$

$\left.\begin{matrix} TP \parallel AB \\ AB \subset (ABC) \end{matrix}\right\} \Rightarrow TP \parallel (ABC)$

În Δ ADC, (AQ - bisectoarea $\sphericalangle$ DAC $\xRightarrow{T\ bis} \frac{DQ}{QC} = \frac{AD}{AC} \Rightarrow \frac{DP}{PB} = \frac{15}{15\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{DQ}{QC} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Se știe că: $\frac{TD}{TA} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \frac{TD}{TA} = \frac{DQ}{QC} \xRightarrow{R.T.Th} TQ \parallel AC$ de unde $\left.\begin{matrix} TQ \parallel AC \\ AC \subset (ABC) \end{matrix}\right\} \Rightarrow TQ \parallel (ABC)$

$$\left.\begin{matrix} TP \parallel (ABC) \\ TQ \parallel (ABC) \\ TP \cap TQ = \{T\} \end{matrix}\right\} \Rightarrow (PTQ) \parallel (ABC)$$

b)

În Δ ADC, $AD = DC$ =15 cm și $AC = 15\sqrt{2}\ cm \Rightarrow AC^2 = AD^2 + DC^2 \xRightarrow{R.T.P} \Delta$ ADC-dreptunghic $\Rightarrow$ $\sphericalangle ADC = 90° \Rightarrow AD \perp DC$

În Δ ADB, $AD = DB$ =15 cm și $AB = 15\sqrt{2}\ cm \Rightarrow AB^2 = AD^2 + DB^2 \xRightarrow{R.T.P} \Delta$ ADB-dreptunghic $\Rightarrow$ $\sphericalangle ADB = 90° \Rightarrow AD \perp DB$

$$\left.\begin{array}{r} AD \perp DC \\ AD \perp DB \\ DC \cap DB = \{D\} \end{array}\right\} \Rightarrow AD \perp (DBC).$$

Cum $PQ \subset (DBC)$ şi $AD \perp (DBC)$, *rezultă că* $AD \perp PQ$.

Detalii de rezolvare	Barem asociat
*a)*Arată că $TP \parallel (ABC)$ … ………….…........……………………........................	1p
Arată că $TQ \parallel (ABC)$ ....………........…..	1p
Finalizează	1p
*b)*Dovedește că $AD \perp DC$ *și* $AD \perp DB$..	2p
Arată că $AD \perp (DBC)$...…………….……...................	1p
Finalizează	1p

4. Se consideră tetraedrul *ABCD*, înălțimile din *A* și *C* ale fețelor *ABD* și *CBD* sunt concurente în *E*, $E \in BD$.

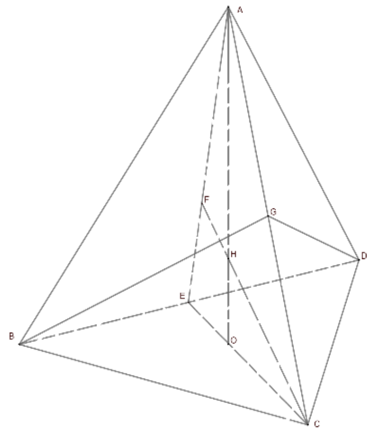
a) Arătați că înălțimile din *A* și *C* ale tetraedrului sunt concurente.

b) Arătați că înălțimile din *B* și *D* ale fețelor *BAC* și *DAC* sunt concurente într-un punct pe dreapta *AC*.

Soluție:

a) Se știe că $AE \perp BD$ și $CE \perp BD$.

Construim perpendiculara $AO \perp CE$, $O \in CE$.



$$\left.\begin{array}{r} AO\perp CE \\ CE\perp BD \\ AE\perp BD \\ CE, BD\subset (BCD) \end{array}\right\} \xRightarrow{R.T.3.\perp} AO\perp(BCD) \Rightarrow AO \text{ -înălțimea tetraedrului}$$

$$\left.\begin{array}{r} CF\perp AE \\ AE\perp BD \\ CE\perp BD \\ AE, BD\subset (ABD) \end{array}\right\} \xRightarrow{R.T.3.\perp} CF\perp(ABD) \Rightarrow CF\text{- înălțimea tetraedrului}$$

În triunghiul *ACE* ,$AO\perp CE, CF\perp AE \Rightarrow AO \cap CF = \{H\}$ (ortocentrul triunghiului) .

În consecință, înălțimile tetraedrului din *A* și *C* sunt concurente.

b) Cum înălțimile ΔACE sunt concurente, rezultă că *EH* este înălțime $\Rightarrow EH \perp AC, EH \cap AC = \{G\}$

Din $DE \perp EA$ și $DE \perp EC, EA \cap EC = \{E\}$, $EA, EC \subset (CEA)$ rezultă $DE \perp (CEA)$, $AC \subset (CEA)$ *și* $EG \perp AC$.

Aplicând teorema celor trei perpendiculare, obținem $DG \perp AC$.

Analog $BE \perp (ACE)$, $AC \subset (CEA)$, $EG \perp AC$, de unde, $BG \perp AC$, adică înălțimile din B și D ale fețelor *DAC* și *BAC* se intersectează în *G*.

Detalii de rezolvare	**Barem asociat**
*a)*Arată că *AO* este înălțime în tetraedru..	1p
Arată că *CF* este înălțime în tetraedru ………….…………........………………............................	1p
Argumentează concurența	1p
*b)*Arată că *DE* perpendiculară pe *(EAC)*	1p
Dovedește că *DG* și *BG* perpendiculare pe *AC*	2p
Finalizează	1p