CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICA PENTRU CLASELE a IV-a – a VIII-a
”OLIMPIADA SATELOR DIN ROMANIA”
– ETAPA JUDEȚEANĂ 12.03.2022 –

CLASA a VII – a

SOLUȚII ŞI BAREME ORIENTATIVE

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte.

1. Să se arate că $a\!:b + c \in \mathbb{N}$, unde $a = \sqrt{28} - \sqrt{72} + \sqrt{80}$, $b = -\sqrt{63} + \sqrt{162} - \sqrt{180}$ și

$c = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{15}} + \frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{\sqrt{35}} + \frac{\sqrt{9}-\sqrt{7}}{\sqrt{63}}$.

Detalii de rezolvare	Barem asociat
$a = 2\sqrt{7} - 6\sqrt{2} + 4\sqrt{5}$	1p
$b = -3\sqrt{7} + 9\sqrt{2} - 6\sqrt{5}$	1p
$c = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{15}} - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{15}} + \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{35}} - \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{35}} + \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{63}} - \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{63}}$ $= 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{7}} + \frac{1}{\sqrt{7}} - \frac{1}{\sqrt{9}} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$	1p 1p
$a\!:b = \frac{a}{b} = \frac{2\sqrt{7} - 6\sqrt{2} + 4\sqrt{5}}{-3\sqrt{7} + 9\sqrt{2} - 6\sqrt{5}} = \frac{2(\sqrt{7} - 3\sqrt{2} + 2\sqrt{5})}{-3(\sqrt{7} - 3\sqrt{2} + 2\sqrt{5})} = -\frac{2}{3}$	2p
$a\!:b + c = -\frac{2}{3} + \frac{2}{3} = 0 \in \mathbb{N}$	1p

2. a) Determinați numerele raționale a și b pentru care $2a \cdot (2 + \sqrt{3}) - b \cdot \left|\sqrt{3} - 2\right| = 14 - \sqrt{3}$.

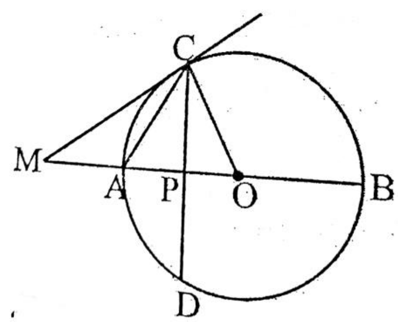
b) Arătați că $\sqrt{2021 \cdot 2022 + \sqrt{2021 \cdot 2022 + \sqrt{2021 \cdot 2022}}} < 2022$.

Detalii de rezolvare	Barem asociat
a) Deduce relația $(4a - 2b) + (2a + b)\sqrt{3} = 14 - \sqrt{3}$	2p

Rezolvă sistemul de ecuații $\begin{cases}4a-2b=14\\2a+b=-1\end{cases}$ și determină $a=1{,}5$ și $b=-4$	2p
b) Prin ridicări succesive la pătrat deduce relațiile $2021\cdot 2022+\sqrt{2021\cdot 2022+\sqrt{2021\cdot 2022}}<2022^2$ $\sqrt{2021\cdot 2022+\sqrt{2021\cdot 2022}}<2022^2-2021\cdot 2022$ $\sqrt{2021\cdot 2022+\sqrt{2021\cdot 2022}}<2022$ .... $2021\cdot 2022+\sqrt{2021\cdot 2022}<2022^2$ $\sqrt{2021\cdot 2022}<2022^2-2021\cdot 2022$ $\sqrt{2021\cdot 2022}<2022$ .... $2021\cdot 2022<2022^2$ $2021<2022$	 1p 1p 1p

3. Fie AB un diametru al cercului $\mathcal{C}(O,r)$. Prin punctul P, mijlocul lui $[OA]$, construim perpendiculara pe AB care intersectează cercul în C și D. Tangenta în C la cerc intersectează dreapta AB în M. Arătați că A este mijlocul segmentului [OM].

Soluție:



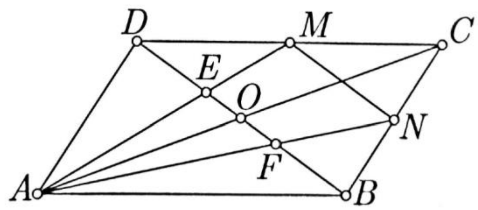
MC tangentă la cerc în $C \Longrightarrow MC \perp OC \Longrightarrow \sphericalangle MCO = 90^0$. Fie $CD \cap AB = \{P\}$. Avem CP înălțime și mediană în ΔACO de unde rezultă că ΔACO este isoscel de bază $[AO] \Longrightarrow AC = OC$. Cum $AO = OC = r$ avem ΔACO echilateral, $AC = AO$ și $\sphericalangle ACO = 60^0 \Rightarrow$ Calculând $\sphericalangle AMC = 180^0 - 90^0 - 60^0 = 30^0$ și $\sphericalangle ACM = 90^0 - 60^0 = 30^0 \Longrightarrow \Delta AMC$ isoscel, $AM = AC$ și $AC = AO$ de unde avem $AM = AO$. Deducem că A mijlocul $[OM]$.

Detalii de rezolvare	**Barem asociat**
MC tangentă la cerc în $C \Longrightarrow MC \perp OC \Longrightarrow \sphericalangle MCO = 90^0$	1p
Demonstrează că ΔACO echilateral și deduce că $AC = AO$ și $\sphericalangle ACO = 60^0$	2p
Calculează $\sphericalangle AMC = 30^0$ și $\sphericalangle ACM = 30^0$	1p

Deduce că ΔAMC isoscel, $AM = AC$	1p
Argumentează că A mijlocul $[OM]$	2p

4. Se consideră patrulaterul convex $ABCD$ și punctele M și N mijloacele laturilor DC, respectiv BC. Notăm cu E și F punctele de intersecție ale diagonalei BD cu dreptele AM, respectiv AN. Se știe că $DE = EF = FB$. Arătați că patrulaterul $ABCD$ este paralelogram.

Soluție:



În ΔBCD, MN este linie mijlocie, deci $MN \parallel BD$ (1) și $MN = \frac{BD}{2}$ (2). Din $DE = EF = FB$ avem $BD = 3EF$ și din (2) $MN = \frac{3EF}{2} \Leftrightarrow \frac{EF}{MN} = \frac{2}{3}$. Cum, în triunghiul ΔAMN, din $MN \parallel EF$ avem $\Delta AEF \sim \Delta AMN$, de unde $\frac{AE}{AM} = \frac{AF}{AN} = \frac{EF}{MN} = \frac{2}{3}$.

Notăm $\{O\} = BD \cap AC$.

În ΔACD, din AM mediană și $\frac{AE}{AM} = \frac{2}{3}$ rezultă că E este centru de greutate, deci DO este mediană, adică $AO = OC$ (3) și $OE = \frac{DE}{2}$ (4). În ΔABC, din AN mediană și $\frac{AF}{AN} = \frac{2}{3}$ rezultă că F este centru de greutate și $OF = \frac{BF}{2}$ (5). Din (4) și (5) și $DE = BF$ obținem $OE = OF$ și atunci $OD = OB$ (6). Din (3) și (6) deducem că $ABCD$ este paralelogram.

Detalii de rezolvare	**Barem asociat**
MN este linie mijlocie, deci $MN \parallel BD$ (1) și $MN = \frac{BD}{2}$ (2)...	1p
Deduce $BD = 3EF$ și $MN = \frac{3EF}{2} \Leftrightarrow \frac{EF}{MN} = \frac{2}{3}$	1p
Din $MN \parallel EF$ avem $\Delta AEF \sim \Delta AMN$, de unde $\frac{AE}{AM} = \frac{AF}{AN} = \frac{EF}{MN} = \frac{2}{3}$	1p
Deduce $OE = \frac{DE}{2}$ și $OF = \frac{BF}{2}$	2p
Arată că $OD = OB$ și deduce că $ABCD$ este paralelogram	2p